Fiche de calcul n° 18 **0017A**

Sommes et produits

Prérequis
Factorielle. Identités remarquables. Décomposition en éléments simples.
Fonctions usuelles (racine carrée, logarithme népérien).

Rappel

Si q est un nombre réel, si $m, n \in \mathbb{N}^*$ et si $m \leqslant n$, on a

- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} q^m \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Calculs de sommes simples

Calcul 18.1

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k+n-1)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3}\right)$ ....

Calcul 18.2

Même exercice.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big(4k(k^2+2)\big)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k}$ ....

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (7^k + 4k - n + 2)$ ....

f) $\displaystyle\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$ ....

Calcul 18.3 — Produits.

Calculer les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tels que $p \geqslant q$.

a) $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} 2$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k} \times k$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=-10}^{10} k$ ....

Avec des changements d'indice

Calcul 18.4

Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n+1-k$ avec $j = n+1-k$. ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ avec $j = n+1-k$. ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ avec $j = k-1$. ....

d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$ avec $j = k-2$. ....

Sommes et produits télescopiques

Calcul 18.5 — Sommes télescopiques.

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ ....

Calcul 18.6 — Produits télescopiques.

Calculer les produits suivants.

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-3}$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ ....

À l'aide d'une décomposition en éléments simples

Calcul 18.7

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$ ....

Sommation par paquets

Calcul 18.8

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\min(k,n)$ ....

Sommes doubles

Calcul 18.9

Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j$ ....

b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)^2$ ....

e) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \ln(i^j)$ ....

f) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$ ....

Coefficients binomiaux

Prérequis

Factorielle. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Manipulations de factorielles et de coefficients binomiaux

Calcul 19.1 — Pour s'échauffer.

Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\dfrac{101!}{99!}$ ....

b) $\dfrac{10!}{7!}$ ....

c) $\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!}$ ....

d) $\dbinom{6}{2}$ ....

e) $\dbinom{8}{3}$ ....

f) $4 \times \dbinom{7}{4}$ ....

Calcul 19.2 — Pour s'échauffer – *bis*.

Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, de coefficients binomiaux et, le cas échéant, à l'aide de puissances.

a) $6 \times 7 \times 8 \times 9$ ....

b) $\dfrac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$ ....

c) $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ ......

d) $3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$ ...

Calcul 19.3 — Avec des paramètres.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k < n$.

a) $\dbinom{n}{2}$ (pour $n \geqslant 2$) ....

b) $\dbinom{n}{3}$ (pour $n \geqslant 3$) ....

c) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$ ....

d) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ ....

e) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!}$ ....

f) $\dfrac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \dfrac{n!}{2^{2n}}$ ....

Calcul 19.4 — Avec des paramètres – *bis*.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre a désigne un nombre non nul.

a) $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{2n \times (n+1)!} + \dfrac{1}{2 \times (n+2)!}$ ....

b) $\dfrac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \dfrac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3}$ ....

Autour du binôme de Newton

Calcul 19.5

Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Calcul 19.6

a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton $(1+1)^n + (1-1)^n$ ....

b) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$ ....

Calcul 19.7

En utilisant la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$ ......

Calcul 19.8

a) Donner le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$ ....

b) En donner une autre expression en développant le produit $(1+x)^n(1+x)^n$ ....

c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ ....