Correction du Devoir sur temps libre 3

Correction de l'exercice 1 :

1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $0 \leq u_n < 1$.
   - Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 < 1$. La propriété est vraie au rang 0.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $0 \leq u_n < 1$. Alors $0 \leq u_n^2 < 1$, $1 \leq u_n^2 + 1 < 2$ et $\frac{1}{2} \leq \frac{u_n^2+1}{2} < 1$. D'où $0 \leq u_{n+1} < 1$ et la propriété est vraie au rang $n+1$.

   D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 1$.
2. Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n = -1 + n(n-1)$.
   - Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = -1$ et $-1 + 0 \times (0-1) = -1$, et pour $n = 1$, $u_1 = -1$ et $-1 + 1 \times (1-1) = -1$. Donc la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_n = -1 + n(n-1)$ et $u_{n+1} = -1 + (n+1)n$. Alors

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n \\
&= (n+1)(-1 + (n+1)n) - (n+2)(-1 + n(n-1)) \\
&= -n - 1 + (n+1)^2 n + n + 2 - n(n+2)(n-1) \\
&= 1 + n^3 + 2n^2 + n - n(n^2 + n - 2) \\
&= 1 + n^3 + 2n^2 + n - n^3 - n^2 + 2n \\
&= n^2 + 3n + 1.
\end{aligned}$$

     Or $-1 + (n+2)(n+1) = -1 + n^2 + 3n + 2 = n^2 + 3n + 1$. La propriété est donc vraie au rang $n+2$,

   D'après le principe de récurrence double, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -1 + n(n-1)$.

Correction de l'exercice 2 : Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$.

- **Initialisation :** pour $n = 1$, la fonction f est dérivable une fois sur $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$ par opérations usuelles. De plus, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}$, $f'(x) = -\frac{1}{(x+a)^2}$ et $\frac{(-1)^1 1!}{(x+a)^{1+1}} = -\frac{1}{(x+a)^2}$, donc la propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité :** Soit $n \geq 1$. Supposons que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$. Alors $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$ par opérations usuelles. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}$, $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \frac{(-1)^n n!(-n-1)}{(x+a)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x+a)^{n+2}}$. Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$ et : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$.

Correction de l'exercice 6 : Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $\forall x \in [-1, +\infty[$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$ » est vraie.

- Initialisation : pour $n = 0$, on prend $x \in [-1, +\infty[$. Alors $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0 \times x = 1$.
- Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons que : $\forall x \in [-1, +\infty[$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Soit $x \in [-1, +\infty[$. Alors $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$. Or $1+x \geq 0$ et par HR, $(1+x)^n \geq 1+nx$, donc $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$. Donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1 + (n+1)x$ car $nx^2 \geq 0$. Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Correction de l'exercice 4 : Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n \leq 2^n$.

- **Initialisation :** pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \leq 2^0$.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, $u_k \leq 2^k$. Montrons que $u_{n+1} \leq 2^{n+1}$.
  Or, $u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} 2^k$ par hypothèse de récurrence.
  Mais, $\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1 - 2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1 \leq 2^{n+1}$.
  Donc $u_{n+1} \leq 2^{n+1}$.

D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 2^n}$.

Correction de l'exercice 5 :

1. f est inférieure à g : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq g(x)$. La négation est : $\exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) > g(x)$.
2. f est la fonction nulle : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$. La négation est : $\exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0$.
3. f ne s'annule jamais : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$. La négation est : $\exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0$.
4. Tout réel admet un antécédent par f : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y$. La négation est $\exists y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq y$.
5. Il existe un réel plus grand que tous les autres : $\exists x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y$. La négation est : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x < y$.

Correction de l'exercice 6 :

1. Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}^2(t) - \mathrm{sh}^2(t) &= \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 2 - \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x} + 2}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(t) - \mathrm{sh}^2(t) = 1}$.

2. Comme sh, ch et arctan sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) > 0$, $\boxed{\text{les fonctions } f \text{ et } g \text{ sont dérivables sur } \mathbb{R}}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{ch}(x)}{1 + \mathrm{sh}^2(x)} = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}(x)}$$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\frac{\mathrm{ch}(x)(1+\mathrm{ch}(x)) - \mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{ch}^2(x))}}{1 + \frac{\mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2}} \\
&= \frac{\mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2 + \mathrm{sh}^2(x)} \\
&= \frac{1 + \mathrm{ch}(x)}{1 + 2\,\mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)} \\
&= \frac{1 + \mathrm{ch}(x)}{2\,\mathrm{ch}^2(x) + 2\,\mathrm{ch}(x)} \\
&= \frac{1}{2\,\mathrm{ch}(x)}.
\end{aligned}$$

On remarque que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = g'(x)}$.

4. D'après la question précédente, $(f-g)'$ est nulle sur $\mathbb{R}$, donc $f - g$ est constante sur $\mathbb{R}$. Or, $(f-g)(0) = 0$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f-g)(x) = 0$, d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)}$.

5. On remarque que $\mathrm{e}^{\frac{\ln(3)}{2}} = \sqrt{3}$ et $\mathrm{e}^{-\frac{\ln(3)}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}\left(\frac{\ln(3)}{2}\right) &= \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
\mathrm{ch}\left(\frac{\ln(3)}{2}\right) &= \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

6. $\boxed{f\left(\frac{\ln(3)}{2}\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{12}}$.

7. On a donc $g\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right) = \dfrac{\pi}{12}$. Or,

$$g\left(\frac{\ln(3)}{2}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right).$$

Ainsi, $\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{1}{2+\sqrt{3}}}$.