Sommes et produits - Exercices

Exercice 1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Factoriser l'expression $a^{2m+1} + b^{2m+1}$ par $a+b$. Est-il possible de factoriser $a^{2m} + b^{2m}$ par $a+b$?

Exercice 2.
1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. À l'aide de la formule du binome, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x > -1$. On pose $a = x+1$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a^n - 1 \geq n(a-1)$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 3.
1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.
2. En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer la partie entière de $\displaystyle\sum_{k=1}^{25} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
4. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=10000}^{1000000} \frac{1}{\sqrt{k}}$ avec un erreur inférieure à $\dfrac{1}{50}$.

Exercice 4. Déterminer a et b dans $\mathbb{Z}$ tels que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
En s'inspirant de la méthode précédente, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 5. Calculer les sommes et produits :

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$
3. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$
4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Exercice 6.
1. On souhaite calculer la somme $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ d'une façon différente de celle vue en cours en utilisant notamment $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.
   (a) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2$ de deux façons différentes en fonction de S_1, S_2 et n.
   (b) En déduire la valeur de S_1.
2. En s'inspirant du 1, calculer S_2 puis $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k, \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad \text{et} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Démontrer par récurrence que $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $b_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $c_n = (a_n)^2$.

Exercice 8. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2^k + 4k + n - 3)$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{2^{2k-1}}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx)$, $(x \in \mathbb{R})$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3+(-1)^k}\right)^k$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$

Exercice 9. Soient n, p des entiers tels que $0 \leq p \leq n$. Montrer les relations :

$$\text{a)} \quad \binom{n-1}{p-1} = \frac{p}{n}\binom{n}{p} \qquad \text{b)} \quad \binom{n+k}{k}\binom{n}{p} = \binom{n+k}{p+k}\binom{p+k}{k}$$

Exercice 10. Soit $n > 1$ un entier naturel. Exprimer le quotient $\dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}$ en fonction de $\dbinom{2n}{n}$.

Exercice 11. Montrer par récurrence sur n que pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$, on a :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Interpréter le résultat sur le triangle de Pascal.

Exercice 12. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$; b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} k\binom{n}{k}$; c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$; d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

Indication : On pourra utiliser la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \leq n$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

Exercice 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

1. En effectuant le changement d'indice $j = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n.
2. En déduire la valeur de S_n.

Exercice 15. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq r \leq m, n$.

1. Que vaut le coefficient devant x^r dans le développement de $(1+x)^{m+n}$?
2. Que vaut le coefficient devant x^r dans le développement de $(1+x)^n(1+x)^m$?
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$.

Exercice 16.

1. Linéariser les expressions suivantes : a) $\sin^3(x)\cos^3(x)$; b) $\cos(x)\cos^2(2x)$
2. En déduire les valeurs des intégrales : a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos^2(2x)\mathrm{d}x$

Exercice 17. Exprimer :

1. $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$.
2. $\sin(5x)$ en fonction de $\sin x$.

Exercice 18. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(a+k\theta)$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^3(k\theta)$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\sin(k\theta)$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\cos(k\theta)$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\alpha)\sin(k\beta)$

Exercice 19. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} (i+j)$
2. $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} (i+j)$
3. $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} \min(i,j)$
4. $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j)$
5. $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} ij$
6. $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{i}{j-1}$
7. $\displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n} 2^{-j}\binom{j}{i}$

Exercice 20.

1. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k}$.
2. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ en faisant apparaître une somme double.

I. Indications - Solutions

Exercice 1 : Justifier d'abord que $a^{2m+1}+b^{2m+1}=a^{2m+1}-(-b)^{2m+1}$.
Que se passerait-il si on pouvait factoriser, puis remplacer b par $-a$?
Exercice 2 :

1. Pour $n\in\mathbb{N}$, $(1+x)^n=\binom{n}{0}x^0+\binom{n}{1}x^1+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^k$. On minore la somme par 0 car $x\geq 0$.
2. (a) On utilise Bernoulli : $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+\cdots+1)$. On distingue ensuite les cas $a>1$, $a<1$ et $a=1$.
   (b) On remplace $x=a-1$ dans l'inégalité précédente.

Exercice 3 :

1. $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ en utilisant la quantité conjuguée. Comme $\sqrt{k+1}<\sqrt{k}$, on obtient l'encadrement voulu.
2. Avec l'inégalité de gauche on obtient : $\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{n}-2$, donc $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}-1$. Avec l'inégalité de droite on obtient : $2\sqrt{n+1}-2<\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$.
3. $2\sqrt{26}-2<S<2\sqrt{25}-1=9$. De plus, $2\sqrt{26}-2>2\sqrt{25}-2=8$. Donc la partie entière vaut 8.
4. On retrouve un encadrement : $2\sqrt{1000001}-2\sqrt{10000}<\sum_{k=10000}^{1000000}\dfrac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{1000000}-2\sqrt{9999}$, et avec la calculatrice, on obtient $1800,001<S<1800,02$.

Exercice 4 : On trouve $a=1$, $b=-1$. La somme vaut $1-\dfrac{1}{n+1}$.
On écrit $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{k}+\dfrac{-1}{k+1}+\dfrac{\frac{1}{2}}{k+2}$. La somme vaut $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.
Exercice 5 :

1. $\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}=1-\dfrac{1}{n}$
2. $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{k+1}{(k+1)!}-\dfrac{1}{(k+1)!}=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$
3. $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\dfrac{1}{k}\right)=\dfrac{1}{n}$
4. $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\dfrac{k-1}{k}\dfrac{k+1}{k}=\dfrac{n+1}{2n}$

Exercice 6 :

1. (a) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2=S_2+(n+1)^2-1=S_2+2S_1+n$
   (b) $S_1=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3=S_3+(n+1)^3-1=S_3+3S_2+3S_1+n$, donc $S_2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. De même, $S_3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 8 :

1. $\sum_{k=0}^{n}k(k+1)=\sum_{k=0}^{n}k^2+\sum_{k=0}^{n}k=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(2n+4)}{6}$
2. $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=n(n+1)+n=n(n+2)$
3. $\sum_{k=0}^{n}(2^k+4k+n-3)=2^{n+1}+2n(n+1)+n(n+1)-3(n+1)=2^{n+1}+3(n+1)(n-1)$
4. $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{3^k}{2^{2k-1}}=8(3/4)^{n+1}-8$
5. $\sum_{k=0}^{n}\mathrm{ch}(kx)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{e}^{(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^x-1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}-1}{\mathrm{e}^{-x}-1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}x}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}\dfrac{\mathrm{sh}((n+1)x/2)}{\mathrm{sh}(x/2)}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{n+1}{2}x}}{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}\dfrac{\mathrm{sh}((n+1)x/2)}{\mathrm{sh}(x/2)}=\mathrm{ch}(nx/2)\dfrac{\mathrm{sh}((n+1)x/2)}{\mathrm{sh}(x/2)}$
   si $x\neq 0$.

6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3+(-1)^k}\right)^k = \frac{16}{15}(1-(1/16)^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}) + \frac{2}{3}(1-(1/4)^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor}$ en décomposant en pairs/impairs.
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k = \frac{n}{2}$ si n pair et $-\dfrac{n+1}{2}$ si n impair, donc $(-1)^n\left\lfloor\dfrac{n+1}{2}\right\rfloor$.

Exercice 9 : Appliquer la définition des coefficients binomiaux.

Exercice 10 : On multiplie la fraction par le produit des pairs de 2 à $2n$ en haut et en bas : $\dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)} = \dfrac{(2n)!}{(\prod_{k=1}^{n}2k)^2} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$.

Exercice 11 : Penser à la formule de Pascal pour l'hérédité.

Exercice 12 : On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$ d'après la formule du binôme de Newton.

1. En dérivant f, $f'(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$
2. $f'(-1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k} = 0$ si $n\geq 2$, $=1$ si $n=1$
3. En primitivant f (attention à la constante!), $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.
4. En dérivant 2 fois f : $f''(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k} = f''(1)+f'(1) = n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}$.

Exercice 13 : On pourra vérifier que $\dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{p-k} = \dbinom{n}{p}\dbinom{p}{k}$, puis utiliser la formule du binôme de Newton pour trouver $2^p\dbinom{n}{p}$.

Exercice 14 :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{j=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}$.
2. $2S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$, donc $S_n = 2^{2n}$.

Exercice 15 :

1. $\dbinom{m+n}{r}$ (Newton).
2. On applique Newton à chacun des deux facteurs, puis on redéveloppe. Pour obtenir une puissance r à la fin, on prend une puissance k dans le premier facteur et une puissance $r-k$ dans le deuxième. On trouve $\displaystyle\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$.

Exercice 16 :

1. a) $\sin^3 x\cos^3 x = \dfrac{3}{32}\sin(2x) - \dfrac{1}{32}\sin(6x)$

   b) $\cos x\cos^2(2x) = \dfrac{1}{2}\cos(x) + \dfrac{1}{4}\cos(3x) + \dfrac{1}{4}\cos(5x)$.
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{pi}{2}}\sin^3 x\cos^3 x\mathrm{d}x = \frac{1}{12}$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos^2(2x)\mathrm{d}x = \frac{7}{15}$.

Exercice 17 :

1. $\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.
2. $\sin(5x) = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$.

Exercice 18 :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta) = \sin\frac{n\theta}{2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ si $\theta\notin 2\pi\mathbb{Z}$, $=0$ si $\theta\in 2\pi\mathbb{Z}$;

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(a+k\theta)=\cos\left(a+\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ si $\theta\notin 2\pi\mathbb{Z}$, $=(n+1)\cos a$ si $\theta\in 2\pi\mathbb{Z}$;
- linéariser $\cos^3(x)$ pour trouver $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos^3(k\theta)=\frac{3}{4}\cos\frac{n\theta}{2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{4}\cos\frac{3n\theta}{2}\frac{\sin\frac{3(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{3\theta}{2}}$ si $\theta\notin 2\pi\mathbb{Z}\cup\frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}$;
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)=2^n\sin\frac{n\theta}{2}\cos^n\frac{\theta}{2}$;
- on dérive la précédente ;
- utiliser $\sin(k\alpha)\sin(k\beta)=\frac{1}{2}\cos(k(\alpha-\beta))-\frac{1}{2}\cos(k(\alpha+\beta))$.

Exercice 19 :

1. $\displaystyle\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}(i+j)=p\frac{n(n+1)}{2}+n\frac{p(p+1)}{2}=\frac{np(n+p+2)}{2}$
2. $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n}(i+j)=\frac{(n-1)n(n+1)}{2}$ (on peut décomposer la somme précédente en somme sur la diagonale plus 2 fois la somme cherchée).
3. $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n}\min(i,j)=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$
4. $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n}\min(i,j)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
5. $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n}ij=\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$
6. $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n}\frac{i}{j-1}=n-1$
7. $\displaystyle\sum_{0\le i\le j\le n}2^{-j}\binom{j}{i}=n+1$

Exercice 20 :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}=\sum_{0\le k\le i\le n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}=\sum_{i=0}^{n}2^i\binom{n}{i}=3^n.$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k2^k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}2^k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}2^k=\sum_{i=1}^{n}2^i(2^{n-i+1}-1)=n2^{n+1}-\sum_{i=1}^{n}2^i=n2^{n+1}-2(2^n-1)=(n-1)2^{n+1}+2$