Correction du Devoir sur temps libre 4

Correction de l'exercice 1 :

1. (a) Comme $1-x^2=(1-x)(1+x)$, un tableau de signes nous donne $1-x^2\geq 0 \iff [-1,1]$. Donc $\boxed{g \text{ est définie sur } [-1,1]}$.

   (b) La fonction g est dérivable sur $]-1,1[$ (attention à la racine carrée). Pour tout $x\in]-1,1[$, $g'(x)=2\sqrt{1-x^2}+2x\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=2\sqrt{1-x^2}-\dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=2\dfrac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=2\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.
   On a $g(x)=0 \iff x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, donc le tableau de variations :

x	-1		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$g'(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\parallel$
g	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

   (c) D'après le tableau de variations, pour tout $x\in[-1,1]$, $g(x)\in[-1,1]$. Or arcsin est définie sur $[-1,1]$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est définie sur } [-1,1]}$.

2. Soit $x\in[-1,1]$: $f(-x)=\arcsin(-2x\sqrt{1-(-x)^2})=-\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ car arcsin est impaire. Donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

3. D'après le tableau de variations de g, $g(x)=\pm 1 \iff x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Or arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et$g$ est dérivable sur $]-1,1[$. Donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } A=\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[}$.

   Pour tout $x\in A$, $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}=2\dfrac{\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}}=2\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2+4x^4}}=2\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-2x^2)^2}}$ donc $f'(x)=2\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}|1-2x^2|}$.

   $\boxed{\text{Si } x\in\left]0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[,\ 1-2x^2>0, \text{ donc } f'(x)=2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \text{ Si } x\in\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[,\ 1-2x^2<0, \text{ donc } f'(x)=-2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

4. D'après la question 1c, $\boxed{\Delta \text{ est définie sur } [-1,1]}$. D'après la question 3, Δ est dérivable sur A.

5. D'après 3, pour tout $x\in I=\left]0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$, $\Delta'(x)=0$, donc Δ est constante sur I. De plus, $\dfrac{1}{2}\in I$, donc pour tout $x\in I$, $\Delta(x)=\Delta(1/2)=\arcsin\left(\dfrac{3}{2}\right)-2\arcsin(1/2)=\dfrac{\pi}{3}-2\dfrac{\pi}{6}=0$.

   D'où $\boxed{\forall x\in\left]0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[,\ \Delta(x)=0}$.

6. Pour tout $x\in\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right[$, $\Delta'(x)=-4\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Donc il existe $C\in\mathbb{R}$ telle que pour tout $x\in\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right[$, $\Delta(x)=-4\arcsin(x)+C$. En évaluant en $\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\Delta(\sqrt{3}/2)=\dfrac{\pi}{3}-2\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{3}$ et $-4\arcsin(\sqrt{3}/2)+C=-\dfrac{4\pi}{3}+C$. Donc $C=\pi$.

   Ainsi, $\boxed{\forall x\in\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[,\ \Delta(x)=-4\arcsin(x)+\pi}$.

7. Les solutions de l'équation de départ sont les solutions de $\Delta(x)=0$. Or, pour tout $x\in\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right[$, $\Delta(x)=0 \iff \arcsin(x)=\dfrac{\pi}{4} \iff x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, donc l'équation n'a pas de solution sur cet intervalle.

On vérifie que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 0 sont solutions. Et d'après la question 5, tous les $x \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ sont solutions.

Comme Δ est impaire, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation est } \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]}$.

Correction de l'exercice 2 :

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{g(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{n}x^n}$.

   (b) D'où $\boxed{S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = g(1) = (1+1)^n = 2^n}$ et $\boxed{S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = g(-1) = (1-1)^n = 0}$.

   (c) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en utilisant la première forme : $g'(x) = n \times (1+x)^{n-1}$.
   En utilisant la forme développée :
   $g'(x) = 0 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \times 2x + \binom{n}{3} 3x^2 + \ldots + \binom{n}{n} n x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$.

   (d) Donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = g'(1) = n \times 2^{n-1}}$.

2. (a) $S'_1 + S'_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = S_1 = 2^n$. D'autre part, $(-1)^k = 1$ si k est pair et $(-1)^k = -1$ si k est impair, donc

$$
\begin{aligned}
S'_1 - S'_2 &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}(-1) \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \\
&= S_2 = 0.
\end{aligned}
$$

   (b) En ajoutant les deux égalités, on trouve $2S'_1 = 2^n$, donc $S'_1 = 2^{n-1}$, puis $S'_2 = 2^{n-1}$.

3. (a) Comme 1, j et j^2 sont les racines cubiques de l'unité, on a $\boxed{1 + j + j^2 = 0}$.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$:

   - $\boxed{\text{si } k \text{ est un multiple de 3, alors } j^k = 1 \text{ et } j^{2k} = 1}$. En effet, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3m$, donc $j^k = (j^3)^m = 1^m = 1$ et $j^{2k} = (j^3)^{2m} = 1$.
   - $\boxed{\text{si le reste de la division euclidienne de } k \text{ par 3 vaut 1, alors } j^k = j \text{ et } j^{2k} = j^2.}$ En effet, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3m+1$, donc $j^k = (j^3)^m \times j = j$ et $j^{2k} = (j^3)^{2m} \times j^2 = j^2$.
   - $\boxed{\text{si le reste de la division euclidienne de } k \text{ par 3 vaut 2, alors } j^k = j^2 \text{ et } j^{2k} = j.}$ En effet, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3m+2$, donc $j^k = (j^3)^m \times j^2 = j^2$ et $j^{2k} = (j^3)^{2m} \times j^4 = j$.

   (c) On remarque que $\boxed{R_0 + R_1 + R_2 = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = S_1 = 2^n}$.

   (d) Développons :

$$
\begin{aligned}
(1+j)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k 1^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k \\
&= \sum_{k=0,3|k}^{n} \binom{n}{k} j^k + \sum_{k=0,3|k-1}^{n} \binom{n}{k} j^k + \sum_{k=0,3|k-2}^{n} \binom{n}{k} j^k \quad = \sum_{k=0,3|k}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0,3|k-1}^{n} \binom{n}{k} j + \sum_{k=0,3|k-2}^{n} \binom{n}{k} j^2 = R_0 + jR_1 + j^2 R_2
\end{aligned}
$$

d'après la question 3b. On recommence avec l'autre :

$$\begin{aligned}(1+j)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} j^{2k} 1^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} j^{2k}\\ &= \sum_{k=0,3|k}^{n}\binom{n}{k} j^{2k} + \sum_{k=0,3|k-1}^{n}\binom{n}{k} j^{2k} + \sum_{k=0,3|k-2}^{n}\binom{n}{k} j^{2k}\\ &= \sum_{k=0,3|k}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0,3|k-1}^{n}\binom{n}{k} j^{2} + \sum_{k=0,3|k-2}^{n}\binom{n}{k} j\\ &= R_0 + j^2 R_1 + j R_2\end{aligned}$$

encore en utilisant la question 3b.

(e) En factorisant par l'angle moitié :

$$\begin{aligned}(1+j)^n &= \left(1+\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^n\\ &= \mathrm{e}^{\frac{ni\pi}{3}}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^n\\ &= \mathrm{e}^{\frac{ni\pi}{3}}\end{aligned}$$

(f) On ajoute les trois équations précédentes :

$$\begin{aligned}2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n &= R_0 + R_1 + R_2 + R_0 + jR_1 + j^2R_2 + R_0 + j^2R_1 + jR_2\\ &= 3R_0 + (1+j+j^2)R_1 + (1+j+j^2)R_2\\ &= 3R_0\end{aligned}$$

d'après la question 3a. D'autre part, en remarquant que $1+j^2 = \overline{1+j}$, on a

$$(1+j)^n + (1+j^2)^n = 2\,\mathrm{Re}\left((1+j)^n\right).$$

D'après la question précédente, on a :

$$(1+j)^n + (1+j^2)^n = 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

Ainsi,

$$\boxed{R_0 = \frac{1}{3}\left(2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n\right) = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)}$$

4. On utilise $i = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$ à la place de j.