Applications des nombres complexes - Exercices

I. Équations

Exercice I.1. Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de :
a) e^{2i} ; b) $3+4i$; c) $7-24i$; d) $-15+8i$; e) $9+40i$

Exercice I.2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $iz^2+3z-2i=0$
b) $z^2+3iz+4=0$
c) $z^2+(1+i)z+1-i=0$
d) $(2z^2-3z+2)^2+(z^2-3z+2)^2=0$
e) $z^4-(3+8i)z^2-16+12i=0$
f) $e^{2z}+e^z+1=0$

Exercice I.3. * Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+z^2+(-1+3i)z+44+12i=0$, sachant que celle-ci admet une racine réelle.

Exercice I.4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^4=\dfrac{16\sqrt{2}}{1-i}$ et $z^8=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$. On donnera les solutions sous forme exponentielle.

Exercice I.5. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
a) $(z-i)^4=1$; b) $(z-1)^4=(z+1)^4$

Exercice I.6. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
a) $z^8-(2i\sqrt{3}-2)z^4-8(1+i\sqrt{3})=0$; b) $z^{2n}+z^n+1=0$.

Exercice I.7. Résoudre :
a) $z^n=(z+1)^n$; b) $(1+iz)^{2n}=(1-iz)^{2n}$; c) * $z^7=\overline{\left(\dfrac{1}{z^2}\right)}$.

Exercice I.8. Soit $\omega=e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. Formez une équation du second degré dont les racines sont $\alpha=\omega+\omega^4$ et $\beta=\omega^2+\omega^3$. La résoudre.
2. En déduire une valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.
3. Calculer les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.
4. On considère dans le plan complexe le point B d'affixe i et le point Ω d'affixe $-\dfrac{1}{2}$. Le cercle de centre Ω passant par B rencontre l'axe $x'Ox$ en I et J. Calculez les abscisses des points I et J.
5. En déduire une construction à la règle et au compas, que l'on explicitera soigneusement, du pentagone régulier dont les sommets sont les images des racines cinquième de l'unité.

Exercice I.9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants. On pourra introduire $S=x+y$ et $P=xy$.

1. $\begin{cases} x^2+y^2=-1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x+y=4 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$

II. Géométrie

Exercice II.1. Soient $A(2+4i)$ et $B(8+i)$. Montrer que le triangle OAB est rectangle.

Exercice II.2. On considère les points $A(1+i)$ et $B(-2+3i)$.

1. Déterminer l'affixe du point E tel que le triangle ABE soit un triangle équilatéral direct.
2. Déterminer les affixes des points C et D tels que $ABCD$ soit un carré direct.

Exercice II.3. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct ssi $a + bj + cj^2 = 0$.
2. On prend maintenant ABC un triangle quelconque du plan. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de bases $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. Montrer que les centre de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Exercice II.4. Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points d'affixe z vérifiant :

1. $(2+i)z + (2-i)\overline{z} = 2$;
2. $|1+i+z| = 2$
3. $\begin{cases} |i-z| = 1 \\ |2-z| = 2 \end{cases}$
4. $|z| = |1-z| = \left|\dfrac{1}{z}\right|$
5. $\arg(z-2i) = \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$
6. ** $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice II.5. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{z-2}{z+i}$.

1. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$.
2. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$.

Exercice II.6.

1. Déterminer une racine réelle, puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z + 12 - 6i = 0$$

2. Démontrer que les solutions sont les affixes des sommets d'un triangle rectangle isocèle.

Exercice II.7. ** Déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe z tels que :

1. $M(z)$, $N(z^2)$ et $P(z^4)$ sont alignés.
2. $P(1)$, $M(z)$ et $N(z^2)$ forment un triangle rectangle.
3. $M(z)$, $N\left(\dfrac{1}{z}\right)$ et $P(-i)$ sont alignés.

Exercice II.8. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. On considère l'équation $z^2 - \left(2^{\theta+1}\cos\theta\right)z + 2^{2\theta} = 0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation. On note A et B les points images des solutions.
2. Déterminer θ pour que le triangle OAB soit équilatéral.

Exercice II.9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$. On note Ω le point image de ω dans le plan. On considère la transformation du plan qui à un point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ vérifiant

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

1. On prend $M \neq \Omega$. Justifier que $\Omega M = \Omega M'$ et que $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\ [2\pi]$.
2. Quelle est cette transformation du plan ?

III. Indications - Solutions

Exercice I.1 : a) $e^{2i}:\pm e^{i}$; b) $3+4i:\pm(2+i)$; c) $7-24i:\pm(4-3i)$; d) $-15+8i:\pm(1+4i)$; e) $9+40i:\pm(5+4i)$

Exercice I.2 :

a) $S=\{i,2i\}$

b) $S=\{-4i,i\}$

c) $S=\left\{\dfrac{-(1+i)\pm\left(\sqrt{\sqrt{13}-2}+i\sqrt{\sqrt{13}+2}\right)}{2}\right\}$

d) $S=\left\{1+i,1-i,\dfrac{4+2i}{5},\dfrac{4-2i}{5}\right\}$

e) $S=\left\{\pm(2+i),\pm(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)\right\}$

f) $S=\left\{\dfrac{2i\pi}{3}+2ik\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{4i\pi}{3}+2ik\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice I.3 : On commence par chercher la racine réelle x : elle vérifie $x^3+x^2+(-1+3i)x+44+12i=0$. En prenant la partie imaginaire de l'équation, on trouve $x=-4$. Donc l'équation se réécrit $(z+4)(z^2+az+b)=0$. On développe pour trouver $a=-3$ et $b=11+3i$, puis on finit la résolution : $S=\{-4,2-3i,1+3i\}$.

Exercice I.4 : $z^4=\dfrac{16\sqrt{2}}{1-i}\iff\left(\dfrac{z}{2e^{i\frac{\pi}{16}}}\right)^4=1$, donc $S=\left\{2e^{\frac{(8k+1)i\pi}{16}},k=0,1,2,3\right\}$.

$z^8=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}\iff\left(\dfrac{2^{\frac{1}{16}}z}{e^{\frac{5i\pi}{96}}}\right)^8=1$, donc $S=\left\{\dfrac{1}{2^{\frac{1}{16}}}e^{\frac{(24k+5)i\pi}{96}},k=0,1,\dots,7\right\}$.

Exercice I.5 : a) $(z-i)^4=1:S=\left\{i+e^{\frac{2ik\pi}{4}},k=0,1,2,3\right\}$; b) $(z-1)^4=(z+1)^4\iff\left(\dfrac{z-1}{z+i}\right)^4$. Donc $S=\{0,-i,i\}$.

Exercice I.6 : a) $S=\left\{\sqrt{2}e^{\frac{(6k+1)i\pi}{12}},\sqrt{2}e^{\frac{(2k+1)i\pi}{4}},k=0,1,2,3\right\}$; b) $S=\left\{e^{\frac{(6k\pm2}{3n}},k=0,1,\dots n-1\right\}$.

Exercice I.7 : a) $S=\left\{\dfrac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}},k=1,\dots,n-1\right\}$; b) $S=\left\{\tan\dfrac{k\pi}{2n},k=0,1,\dots,2n-1,k\neq n\right\}$; c) $S=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{5}},k=0,1,\dots,4\right\}$.

Exercice I.8 :

1. On utilise les relations coefficients racines : $\alpha\beta=-1$ et $\alpha+\beta=-1$, donc l'équation $z^2+z-1=0$ convient. Les solutions sont $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.
2. Comme $\omega^4=\overline{\omega}$ et $\overline{\omega^3}=\omega^2$, on a $\alpha=2\cos(2\pi/5)$ et $\beta=2\cos(4\pi/5)$. Or $0<2\pi/5<\pi/24\pi/5<\pi$, donc $\alpha>0$ et $\beta<0$: $\cos(2\pi/5)=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos(4\pi/5)=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$.
3. On remarque : $\cos(\pi/5)=\cos(\pi-4\pi/5)=-\cos(4\pi/5)$ et $\sin(\pi/5)=\sqrt{1-\cos^2(\pi/5)}$.
4. Le cercle a pour rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, donc les abscisses sont $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}=\cos(4\pi/5)$ et $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\cos(2\pi/5)$.
5. On trace les perpendiculaires à Ox passant par I et J et on trouve leurs points d'intersection avec le cercle trigonométrique ce qui donne 4 des racines cinquième de 1.

Exercice I.9 :

1. $\begin{cases}x^2+y^2=-1\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1\end{cases}\iff S=1,P=1\iff(x,y)\in\{(e^{i\pi/3},e^{-i\pi/3});(e^{-i\pi/3},e^{i\pi/3})\}$
2. $\begin{cases}x+y=4\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4\end{cases}\iff S=4,P=1\iff(x,y)\in\{(2+\sqrt{3},2-\sqrt{3});(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})\}$
3. $\begin{cases}x+y=4\\ x^2+y^2=2\end{cases}\iff S=4,P=7\iff(x,y)\in\{(2+i\sqrt{3},2-i\sqrt{3});(2-i\sqrt{3},2+i\sqrt{3})\}$

Exercice II.1 : En faisant un dessin rapide, il semble que le triangle soit rectangle en A. Calculons $\arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_o-z_A}\right)=\arg\left(\dfrac{6-3i}{-2-4i}\right)=\arg\left(\dfrac{3i}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice II.2 :

1. ABE est équilatéral direct ssi $\dfrac{z_E - z_A}{z_B - z_A} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $z_E = -\dfrac{1}{2} - \sqrt{3} + i(2 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2})$.
2. $ABCD$ est un carré direct ssi $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$ et $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$, donc $z_C = -4$ et $z_D = -1 - 2i$.

Exercice II.3 :

1. ABC est équilatéral direct ssi le vecteur $\overrightarrow{BA}$ s'obtient par une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ du vecteur $\overrightarrow{BC}$: $a - b = -j^2(c - b) \iff a + jb + j^2c = 0$ ($\mathrm{e}^{i\pi/3} = -j^2$).
2. En supposant que ABC est direct, on calcule les affixes des nouveaux sommets en utilisant la question précédente, puis les affixes des centre de gravité (moyenne des trois sommets), puis on réapplique la question précédente.

Exercice II.4 :

1. $(2+i)z + (2-i)\overline{z} = 2 \iff \mathrm{Re}((2+i)z) = 1$: $S = \left\{\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i + b(1+2i), b \in \mathbb{R}\right\}$, c'est la droite passant par $\left(\dfrac{2}{5}, -\dfrac{1}{5}\right)$ et de vecteur directeur $(1,2)$.
2. $|1 + i + z| = 2$: c'est le cercle de centre $-1 - i$ et de rayon 2.
3. $\begin{cases} |i - z| = 1 \\ |2 - z| = 2 \end{cases}$ Ce sont les points d'intersection des cercle de centres i et 2 et de rayons 1 et 2 qui ont pour affixes 0 et $\dfrac{4}{5} + \dfrac{8}{5}i$.
4. $|z| = |1 - z| = \left|\dfrac{1}{z}\right|$: ce sont les points qui sont sur la médiatrice des points d'affixes 0 et 1 et qui sont de module 1, ils sont d'affixes $\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.
5. $\arg(z - 2i) = \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$: c'est la droite passant par le point d'affixe $2i$ et de vecteur directeur $(1,1)$, à laquelle il faut retirer le point $2i$.
6. ** $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff |z - 1| = 2\sqrt{2}$: c'est le cercle de centre 1 et de rayon $2\sqrt{2}$.

Exercice II.5 :

1. $|f(z)| = 1$: c'est la médiatrice des points d'affixes 2 et $-i$.
2. $f(z) \in \mathbb{R}$: c'est la droite passant par les points d'affixes 2 et $-i$.
3. $f(z) \in i\mathbb{R}$: c'est le cercle de diamètre joignant les points d'affixes 2 et $-i$.

Exercice II.6 :

1. $S = \{-2, -3i, 1 + 2i\}$ (voir l'exercice I.3)
2. Faire un dessin pour conjecturer le point où l'angle est droit. $\dfrac{1 + 2i - (-2)}{-3i - (-2)} = \dfrac{3 + 2i}{2 - 3i} = i$.

Exercice II.7 :

1. Si $z \neq 0, 1$, $M(z)$, $N(z^2)$ et $P(z^4)$ sont alignés ssi $\dfrac{z^4 - z^2}{z - z^2} = -z(z+1) \in \mathbb{R}$. On trouve $z \in \mathbb{R}$ ou $\mathrm{Re}(z) = -\dfrac{1}{2}$. On vérifie réciproquement que tous les z réels et tous les z vérifiant $\mathrm{Re}(z) = -\dfrac{1}{2}$ fonctionnent.
2. Il faut déjà que $z \neq 0, 1, -1$. $P(1)$, $M(z)$ et $N(z^2)$ forment un triangle rectangle
   - en P ssi $\dfrac{z-1}{z^2-1} \in i\mathbb{R}$: c'est la droite $-1 + i\mathbb{R}$ sans le point -1 ;
   - en M ssi $\dfrac{1-z}{z^2-z} \in i\mathbb{R}$: c'est la droite $i\mathbb{R}$ sans le point 0 ;
   - en N ssi $\dfrac{1-z^2}{z-z^2} \in i\mathbb{R} \iff \dfrac{1-z^2}{z-z^2} = \overline{\dfrac{1-z^2}{z-z^2}} \iff \left|z + \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$: c'est le cercle de centre $-\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$ sans les points 0 et 1.
3. Si $z \neq 0, i$, $M(z)$, $N\left(\dfrac{1}{z}\right)$ et $P(-i)$ sont alignés ssi $\dfrac{z+i}{\frac{1}{z}+i} = \overline{\dfrac{z+i}{\frac{1}{z}+i}} \iff (iz + i\overline{z})(|z|^2 + iz - i\overline{z} - 1) = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$ ou $|z - i| = \sqrt{2}$.

Exercice II.8 :

1. $S = \left\{2^\theta \mathrm{e}^{\pm i\theta}\right\}$.
2. OAB est équilatéral ssi $\mathrm{e}^{2i\theta} = \mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ ssi $\theta = \pm\dfrac{\pi}{6}\,[\pi]$.

Exercice II.9 :

1. Comme $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega} = \mathrm{e}^{i\theta}$, on a directement les résultats voulus.
2. C'est la rotation centrée en Ω et d'angle θ.