Chapitre 7 : Calculs de primitives

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Primitives de fonctions réelles à valeurs complexes

I.1. Continuité et dérivabilité des fonctions à valeurs complexes

On aura besoin dans ce chapitre de la notion de continuité pour une fonction. Sans rentrer dans les détails, on dit qu'une fonction f à valeurs réelles est continue sur un intervalle I si pour tout $a \in I$, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. On ira plus dans les détails plus tard dans le semestre. Pour l'instant, toutes les fonctions usuelles sont continues sur leurs ensembles de définition, et les fonctions obtenues par opérations sur des fonctions continues aussi.
Pour les fonctions à valeurs complexes, on a :

Définition I.1. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction.

- On a pour tout $x \in I$, $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$ avec $f_1(x) = \mathrm{Re}(f(x))$ et $f_2(x) = \mathrm{Im}(f(x))$;
- On dit que f est continue sur I si f_1 et f_2 sont continues sur I ;
- On dit que f est dérivable sur I si f_1 et f_2 sont dérivables sur I et alors $f' = f_1' + i f_2'$.
- On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.

Proposition I.1. *Si $a \in \mathbb{C}$, alors la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = a\mathrm{e}^{ax}$.*

Proposition I.2. *Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur I.*

I.2. Primitives d'une fonction sur un intervalle

Définition I.2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une **primitive** de f si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Proposition I.3. *La différence entre deux primitives d'une même fonction est une constante.*

On admet pour le moment (voir chapitre 25 pour plus de détails) qu'on peut associer à une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, un nombre réel $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ qui représente l'aire algébrique entre la courbe de f et l'axe des abscisses.

Théorème I.4 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

1. *Pour tout $a \in I$, la fonction $F : x \in I \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule au point a.*
2. *Pour tout $a, b \in I$ et toute primitive F de f sur I, on a : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.*

Remarque I.1. On pourra noter $\int^x f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.

Définition I.3. Soit $f = f_1 + i f_2 : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur l'intervalle I. Pour tout $a, b \in I$, on pose $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f_1(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b f_2(t)\mathrm{d}t$.

Remarque I.2.

- En particulier, on a $\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\mathrm{d}t$ et $\mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\mathrm{d}t$.
- Le théorème fondamental est encore vrai pour une fonction continue à valeurs complexes.

II. Méthodes de calcul de primitives

II.1. Calcul direct

On peut utiliser les deux propositions suivantes ainsi que le tableau de primitives usuelles.

Proposition II.1 (Linéarité de l'intégrale). *Soient f et g deux fonctions continues sur I, $a, b \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Proposition II.2 (Dérivées de fonctions composées). *Soient $u : I \to J$ dérivable sur I et $F : J \to \mathbb{K}$ dérivable sur J. Alors $F \circ u$ est une primitive de $u' \times F' \circ u$ sur I.*

II.2. Intégration par parties

Théorème II.3

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad \int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v.$$

II.3. Changement de variable

Théorème II.4

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $\varphi : J \to I$ une fonction $\mathscr{C}^1$ sur J. Pour tout $a, b \in J$,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Méthode. En pratique, on pose $x = \varphi(t)$ et $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$, on détermine les nouvelles bornes, puis on applique la formule.

III. Exemples classiques et au programme

III.1. Produit exponentielle sinus/cosinus

Prenons $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}$. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\omega t)$ et $g(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\omega t)$. Ce sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
Pour trouver leurs primitives, on passe en complexe : on pose $h(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{i\omega t}$, de sorte que $h(t) = f(t) + ig(t)$.
Une primitive de h est $H(t) = \dfrac{1}{\alpha + i\omega}\mathrm{e}^{(\alpha+i\omega)t}$.
On retrouve une primitive F de f en prenant la partie réelle de H et une primitive G de g en prenant la partie imaginaire de H.

III.2. Fractions rationnelles

Les fractions rationnelles qui sont inverses de fonctions affines sont faciles à primitiver à l'aide du logarithme : si $f : x \mapsto \dfrac{1}{ax+b} = \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{x+\frac{b}{a}}$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$), alors une primitive de f est $x \mapsto \dfrac{1}{a}\ln\left|x + \dfrac{b}{a}\right|$ (en faisant attention à l'intervalle de définition).

Prenons maintenant une fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$. On commence par calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta = 0$: il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto \dfrac{1}{a(x-r)^2}$. C'est une dérivée de la forme $\dfrac{-u'}{u^2}$ avec $u = x - r$. Une primitive est $F : x \mapsto -\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{x-r}$.
- Si $\Delta > 0$: il existe $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ distincts tels que :

  $$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-r_1)(x-r_2)}.$$

  On cherche alors une décomposition en éléments simples, c'est-à-dire deux réels A et B tels que :

  $$\frac{1}{a(x-r_1)(x-r_2)} = \frac{A}{x-r_1} + \frac{B}{x-r_2}.$$

  On utilise alors le logarithme pour primitiver.
- Si $\Delta < 0$: en mettant sous forme canonique, on trouve $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

  $$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{aB^2}\frac{1}{((\frac{x+A}{B})^2+1)}.$$

  On reconnaît une dérivée de la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$ avec $u = \dfrac{x+A}{B}$.