

Primitives

Prérequis

Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe et réciproque. Trigonométrie hyperbolique.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

Calculs directs

Calcul 10.1



Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\frac{1}{t+1}$

c) $\frac{3}{(t+2)^3}$

b) $\frac{3}{(t+2)^2}$

d) $\sin(4t)$

Calcul 10.2



Même exercice.

a) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$

c) $\frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}$

b) e^{2t+1}

d) $\frac{1}{1+9t^2}$

Utilisation des formulaires

Calcul 10.3 — Dérivée d'une fonction composée.



Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\frac{2t^2}{1+t^3}$

d) $\frac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$

b) $t\sqrt{1+2t^2}$

e) $\frac{t}{1+3t^2}$

c) $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

f) $\frac{12t}{(1+3t^2)^3}$

Calcul 10.4 — Dérivée d'une fonction composée — bis.



Même exercice.

a) $\frac{\ln^3 t}{t}$

d) $\frac{1}{t^2\sqrt{t}}$

b) $\frac{1}{t\sqrt{\ln t}}$

e) $\frac{e^t + e^{-t}}{1 - e^{-t} + e^t}$

c) $\frac{8e^{2t}}{(3 - e^{2t})^3}$

f) $\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}$

Calcul 10.5 — Trigonométrie.



Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\cos^2 t \sin t$ <input type="text"/> | g) $\tan^2 t$ <input type="text"/> | l) $\frac{\cos t}{(1 - \sin t)^3}$ <input type="text"/> |
| b) $\cos(t)e^{\sin t}$ <input type="text"/> | h) $\tan^3 t$ <input type="text"/> | m) $\frac{1}{1 + 4t^2}$ <input type="text"/> |
| c) $\tan t$ <input type="text"/> | i) $\frac{\tan^3 t}{\cos^2 t}$ <input type="text"/> | n) $\frac{e^t}{1 + e^{2t}}$ <input type="text"/> |
| d) $\frac{\cos t}{1 - \sin t}$ <input type="text"/> | j) $\frac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}}$ <input type="text"/> | o) $\frac{\text{Arcsin}(t)}{\sqrt{1 - t^2}}$ <input type="text"/> |
| e) $\frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ <input type="text"/> | k) $\frac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t}$ <input type="text"/> | p) $\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}\text{Arcsin}(t)}$ <input type="text"/> |
| f) $\frac{\cos(\pi \ln t)}{t}$ <input type="text"/> | | |

Calcul 10.6 — Trigonométrie – bis.



Déterminer une primitive des expressions suivantes en utilisant d'abord le formulaire de trigonométrie.

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\cos^2 t$ <input type="text"/> | d) $\frac{\sin(2t)}{1 + \sin^2 t}$ <input type="text"/> | f) $\frac{1}{\sin^2(t) \cos^2(t)}$ <input type="text"/> |
| b) $\cos(t) \sin(3t)$ <input type="text"/> | e) $\frac{1}{\sin t \cos t}$ <input type="text"/> | g) $\frac{1}{\sin(4t)}$ <input type="text"/> |
| c) $\sin^3 t$ <input type="text"/> | | |

Calcul 10.7 — Fractions rationnelles.



Déterminer une primitive des expressions suivantes après quelques manipulations algébriques simples.

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\frac{t^2 + t + 1}{t^2}$ <input type="text"/> | d) $\frac{t^3 + 1}{t + 1}$ <input type="text"/> | g) $\frac{t - 1}{t^2 + 1}$ <input type="text"/> |
| b) $\frac{t^2 + 1}{t^3}$ <input type="text"/> | e) $\frac{t - 1}{t + 1}$ <input type="text"/> | h) $\frac{t}{(t + 1)^2}$ <input type="text"/> |
| c) $\frac{1 - t^6}{1 - t^2}$ <input type="text"/> | f) $\frac{t^3}{t + 1}$ <input type="text"/> | |

Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

Calcul 10.8



Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- intégrer l'expression.

- | | |
|---|--|
| a) $t^2 - 2t + 5$ <input type="text"/> | e) $e^{2t} + e^{-3t}$ <input type="text"/> |
| b) $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}$ <input type="text"/> | f) e^{3t-2} <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{t} - \frac{1}{t^3}$ <input type="text"/> | g) $\frac{t^2}{t^3 - 1}$ <input type="text"/> |
| d) $\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t\sqrt{t}}$ <input type="text"/> | h) $\frac{3t - 1}{t^2 + 1}$ <input type="text"/> |

i) $\sin(t) \cos^2(t) \dots$

j) $\sinh(t) \cosh(t) \dots$

k) $\frac{1}{t^2} \sin \frac{1}{t} \dots$

l) $\frac{e^t}{2 + e^t} \dots$

m) $\frac{\sin t}{2 + 3 \cos t} \dots$

n) $\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \dots$

o) $\frac{\sin 2t}{1 + \cos^2 t} \dots$

p) $te^{-t^2} \dots$

q) $\frac{1 - \ln t}{t} \dots$

r) $\frac{1}{t \ln t} \dots$

s) $\frac{\sin(\ln t)}{t} \dots$

t) $\frac{e^t}{1 + e^{2t}} \dots$

Calcul 10.9 — *Bis repetita.*



Reprendre l'exercice précédent en commençant par intégrer puis en dérivant et factorisant.

Calcul d'intégrales

Prérequis

Primitives usuelles, composées simples.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont « dans le bon ordre ».

Calcul 11.1



Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\int_{-2}^3 x^2 + e^x dx$. b) $\int_5^{-3} |\sin 7x| dx$ c) $\int_0^{-1} \sin x dx$...

Calcul 11.2



En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\int_1^3 7 dx$ c) $\int_0^7 3x dx$ e) $\int_{-2}^2 \sin x dx$
 b) $\int_7^{-3} -5 dx$ d) $\int_2^8 1 - 2x dx$.. f) $\int_{-2}^1 |x| dx$

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, que l'on note $\left[F(x) \right]_a^b$.

Calcul 11.3 — Polynômes.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^3 2 dx$ d) $\int_{-1}^1 3x^5 - 5x^3 dx$
 b) $\int_1^3 2x - 5 dx$ e) $\int_0^1 x^5 - x^4 dx$
 c) $\int_{-2}^0 x^2 + x + 1 dx$ f) $\int_1^{-1} x^{100} dx$

Calcul 11.4 — Fonctions usuelles.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx$... c) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ e) $\int_{-3}^2 e^x dx$
 b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$... d) $\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$... f) $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x}$

Calcul 11.5 — De la forme $f(ax + b)$.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^2 (2x + 1)^3 dx$

d) $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) dx$

b) $\int_{-2}^4 e^{\frac{1}{2}x+1} dx$

e) $\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{\pi x + 2}$

f) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) dx$

Calcul 11.6 — Fonctions composées.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5} dx$

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x (\cos x)^5 dx$

b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin(x^2 + 1) dx$

e) $\int_0^1 x e^{x^2-1} dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x dx$

f) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4} dx$

Calcul 11.7 — Divers.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx$

d) $\int_1^e \frac{3x - 2 \ln x}{x} dx$

b) $\int_{-2}^3 |x+1| dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \sin(x) dx$

c) $\int_{-1}^2 \max(1, e^x) dx$

f) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x \sin x| dx$

Calcul 11.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.



a) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \arcsin x dx$

d) $\int_0^1 \operatorname{ch}(x) dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

e) $\int_0^1 \sqrt{x} dx$

c) $\int_0^2 10^x dx$

f) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} dx$

Intégration par parties

Prérequis
Primitives, dérivées, intégration par parties.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $u \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ et si $v \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Intégrales

Calcul 12.1



Calculer :

- | | |
|--|--|
| a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | g) $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |
| b) $\int_0^1 (2t+3)\text{sh}(2t) dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | h) $\int_0^1 t \arctan t dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |
| c) $\int_0^2 te^{\frac{t}{2}} dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | i) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |
| d) $\int_1^{\ln 2} t2^t dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | j) $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |
| e) $\int_1^e \ln t dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | k) $\int_0^1 \sqrt{1+t} \ln(1+t) dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |
| f) $\int_1^2 t \ln t dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | l) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t \tan^2 t dt$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |

Primitives

Calcul 12.2



Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

- | | |
|---|--|
| a) $x \mapsto (-x+1)e^x$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> | c) $x \mapsto \arctan(x)$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> |
| b) $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> | d) $x \mapsto x \text{ch}(x)$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> |

Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

Calcul 12.3 — Calcul d'intégrales.



a) $\int_0^1 (t^2 + 3t - 4)e^{2t} dt \dots\dots\dots$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t dt \dots\dots\dots$

Calcul 12.4 — Calcul de primitives.



Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \sin(x)\operatorname{sh}(x) \dots\dots$

c) $x \mapsto (x \ln x)^2 \dots\dots\dots$

b) $x \mapsto \ln^2 x \dots\dots\dots$

d) $x \mapsto e^{\arccos(x)} \dots\dots\dots$

Changements de variable

Prérequis

Primitives, dérivées. Changements de variables. Intégration par parties.

Changements de variable

Calcul 13.1



Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.

- a) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ avec $t = \sin \theta$
- b) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} dt$ avec $u = \sqrt{t}$
- c) $\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt$ avec $u = e^t$
- d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t dt$ avec $u = \sin t$
- e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t dt$ avec $u = \sin t$
- f) $\int_1^4 \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt$ avec $u = \sqrt{t}$

Calcul 13.2



Même exercice.

- a) $\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt$ avec $u = \cos t$
- b) $\int_0^1 \frac{1}{2 + e^{-t}} dt$ avec $u = e^t$
- c) $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t-t^2}} dt$ avec $u = \frac{t}{2} - 1$
- d) $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$ avec $t = \tan u$
- e) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} dt$ avec $u = \frac{1}{t}$
- f) $\int_e^{e^2} \frac{\ln t}{t + t \ln^2 t} dt$ avec $u = \ln t$

Changements de variable et intégrations par parties

Calcul 13.3



Effectuer le changement de variable indiqué, continuer avec une intégration par parties et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt$ avec $u = \sqrt{t}$

b) $\int_3^4 \frac{\ln(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}} dt$ avec $u = \sqrt{t}$

Calculs de primitives par changement de variable

Calcul 13.4



Déterminer une primitive de f en utilisant le changement de variable donné.

a) $x \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x}$ avec $u = \tan x$

b) $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1 + \operatorname{th}(x)}$ avec $u = e^x$

c) $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$ avec $u = \sqrt{e^x - 1}$

d) $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}}$ avec $u = \sqrt[3]{x}$

e) $x > 1 \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ avec $u = \sqrt{x^2 - 1}$

Intégration des fractions rationnelles

Prérequis

Fonctions ln et arctan. Division euclidienne entre polynômes.
 Petites décompositions en éléments simples.
 Forme canonique d'un trinôme du second degré.
 Changements de variable affines dans les intégrales.

Premier cas

Calcul 14.1



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^2 \frac{1}{t+1} dt$

b) $\int_1^2 \frac{1}{2t+1} dt$

Calcul 14.2



Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2} + \frac{1}{4}} dt$

b) $\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a} dt$

Deuxième cas

Calcul 14.3



Calculer les intégrales suivantes, en effectuant d'abord une division euclidienne entre le numérateur et le dénominateur des fractions en jeu.

a) $\int_1^2 \frac{1+t+t^2}{1+t} dt$

b) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+2t+3t^2}{4t+5} dt$

Troisième cas

Dans ce troisième cas, il s'agit de reconnaître une expression du type $\frac{u'}{u}$.

Calcul 14.4



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt$

b) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2} + \frac{1}{3}} dt$

Calcul 14.5



Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t + \frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2 + \sqrt{2}t} dt$

b) $\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1 \frac{t}{at^2+1} dt$

Quatrième cas

Calcul 14.6 — Exemple détaillé d'un calcul d'intégrale.



a) Quels sont les deux zéros de $t \mapsto t^2 - 3t + 2$?

b) Trouver deux réels A et B tels que

pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, on ait $\frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2}$

c) Calculer $\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)} dt$

Calcul 14.7



Calculer les intégrales suivantes, en procédant comme ci-dessus.

a) $\int_0^1 \frac{4}{t^2 - 4} dt$

c) $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 4t + 3} dt$

b) $\int_2^3 \frac{2}{t^2 - t} dt$

d) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2 - 1} dt$

Calcul 14.8



Soit $a \in]0, 1[$. Calculer $\int_0^a \frac{1}{t^2 - a} dt$

Cinquième cas

Calcul 14.9 — Une primitive à retenir.



Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

a) Calculer la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

b) Donner une primitive de $x \mapsto \frac{1}{a^2 + x^2}$

Calcul 14.10



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt$

b) $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 3} dt$

Calcul 14.11



Calculer $\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2 + 2} dt$

Synthèse

Calcul 14.12 — Mise sous forme canonique.



Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Mettre sous forme canonique les expressions suivantes (où $x \in \mathbb{R}$).

a) $x^2 + x + 1$

c) $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$

b) $2x^2 - 3x + 1$

d) $ax^2 + a^2x + a^3$

Calcul 14.13



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2} dt$

c) $\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2} dt$

b) $\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t+t^2} dt$

d) $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1} dt$

Calcul 14.14



Soit $a > 1$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3t^2+2t+\frac{10}{3}} dt$

b) $\int_0^1 \frac{1}{t^2-(2a+1)t+a^2+a} dt$

Un calcul plus difficile

Calcul 14.15



Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt$