Calculs de primitives - Exercices

Exercice 1. Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes, en précisant leurs ensembles de définition :

1. $f_1(x) = 6x^2 + 8x + 3$
2. $f_2(x) = 5a^2x^6$
3. $f_3(x) = x(x+a)(x+b)$
4. $f_4(x) = \sqrt{2ax}$
5. $f_5(x) = \dfrac{a}{a-x}$
6. $f_6(x) = \dfrac{2x+3}{2x+1}$
7. $f_7(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
8. $f_8(x) = \dfrac{x}{2x^2+3}$
9. $f_9(x) = a\,\mathrm{e}^{-bx}$
10. $f_{10}(x) = x\,\mathrm{e}^{-(x^2+1)}$
11. $f_{11}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$
12. $f_{12}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$
13. $f_{13}(x) = \cos\dfrac{x}{\sqrt{2}}$
14. $f_{14}(x) = \dfrac{1}{x+ia}$ ($a \in \mathbb{R}^*$), E3A PC 2020
15. $f_{15}(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $f_{16}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\sqrt{\mathrm{ch}(x)}}$
17. $f_{17}(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$
18. $f_{18}(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$
19. $f_{19}(x) = \dfrac{\ln^2(x+2)}{x+2}$

Exercice 2. Déterminer les primitives de :

1. $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$
2. $x \mapsto \sin^2 x$
3. $x \mapsto \cos^3(x)$
4. $x \mapsto \tan(x)$

Exercice 3.
1. Déterminer les primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{3x}\cos(2x)$.
2. Proposer une autre méthode pour trouver ces primitives.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (2t+1)\,\mathrm{e}^{-t}$. On cherche une primitive F de f sous la forme $F(t) = (at+b)\,\mathrm{e}^{-t}$.

1. Dériver F puis en déduire une primitive de $f(t) = (2t+1)\,\mathrm{e}^{t}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (2t+1)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
3. Proposer une autre méthode pour déterminer une primitive de f.

Exercice 5. Déterminer une primitive de chacune des fonctions :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4}$
2. $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x^2}$
3. $x \mapsto \dfrac{x+x^2}{1+x^2}$
4. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+5}$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-5x+6}$
6. $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2-4x+2}$

Exercice 6. Déterminer les expressions de :

1. $x \mapsto \displaystyle\int^x t\ln(t)\mathrm{d}t$
2. $x \mapsto \displaystyle\int^x t\arctan(t)\mathrm{d}t$
3. $x \mapsto \displaystyle\int^x (t-1)\sin(t)\mathrm{d}t$
4. $x \mapsto \displaystyle\int^x (t+1)\,\mathrm{ch}(t)\mathrm{d}t$
5. $x \mapsto \displaystyle\int^x \ln(t)\mathrm{d}t$

Exercice 7. Déterminer les primitives suivantes à l'aide d'un changement de variable :

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t}^3}$
2. $\displaystyle\int^x \frac{\ln(t)}{t+t\ln^2(t)}\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t+1}\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$
5. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)}$, $u = \cos(t)$
6. $I_4 = \displaystyle\int^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t$, $u = \sqrt{1+t}$.

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^1 (it+t^2)\mathrm{d}t$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{-1}^1 |x^2-x|\mathrm{d}x$
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{(2+i)t}\,\mathrm{d}t$
6. $I_6 = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$
7. $I_7 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)\mathrm{d}t$
8. $I_8 = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$
9. $I_9 = \displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$

10. $I_{10} = \int_0^1 5^x \mathrm{d}x$

11. $I_{11} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5x+6}$

12. $I_{12} = \int_0^1 \frac{4x+2}{(x^2+x+3)^3}\mathrm{d}x$

13. $I_{13} = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + i\sin x}$

14. $I_{14} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{ix+1}$.

Exercice 9. 1. Trouver deux réels a et b tels que pour tous $x \notin \{1,2\}$, $\frac{x+2}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$ puis déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{x+2}{x^2-3x+2}$.

2. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$ puis calculer $x \mapsto \int^x \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)}$.
3. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx}{x^2+1} + \frac{c}{x^2+1}$ puis calculer $x \mapsto \int^x \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$.

1. En utilisant une IPP, trouver une relation entre J_n et J_{n+1}.
2. Déterminer l'expression de J_n en fonction de n.
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} x(\ln x)^n \mathrm{d}x$.

1. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} pour tout $n \geq 1$.
2. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
3. Déduire des deux questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\mathrm{e}^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{\mathrm{e}^2}{n+2}$.
4. En déduire que (I_n) et (nI_n) convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 12. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 (\ln x)^2 \mathrm{d}x$
2. $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x$
3. $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t+t\ln^2(t)}$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)\mathrm{d}x$
5. $\int_0^1 \arctan(x)\mathrm{d}x$
6. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$
7. $\int_0^\pi \mathrm{e}^x\cos(x)\mathrm{d}x$
8. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arcsin(x)\mathrm{d}x$
9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2(\cos t)^3\mathrm{d}t$
10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}x$
11. $\int_0^1 \ln(1+t^2)\mathrm{d}t$
12. $\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln(t))\mathrm{d}t$.

Exercice 13. Soient u, v et f trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f est continue. On note F une primitive de f. Soit G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

1. Exprimez G en fonction de F, de u et de v.
2. Montrez que si u et v sont dérivables alors G est dérivable et donnez sa dérivée.
3. Application : étudier la fonction $h : x \mapsto \int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t})\mathrm{d}t + \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t})\mathrm{d}t$.

Exercice 14. 1. Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\mathrm{d}t$ en posant $u = \frac{\pi}{2} - t$.

2. En déduire que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.
3. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}$.

Exercice 15. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que : $\int_0^\pi tf(\sin(t))\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin(t))\mathrm{d}t$.
2. En déduire la valeur de : $\int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\mathrm{d}t$.