Contrôle de cours 6 - Primitives - Sujet A
Mercredi 13 novembre 2024

Question 1 (2 pts)

Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I et $a \in I$.

1. La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
2. Si F est une primitive de f sur I et $a, b \in I$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$. □

Question 2 (6 pts)

1. Calculer en utilisant une IPP : $I = \int_{-1}^0 (x+2)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

   On dérive $x+2$ et on intègre e^{3x} : $u = x+2$, $v' = \mathrm{e}^{3x}$, $u' = 1$ et $v = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$:

$$\begin{aligned} I = \int_{-1}^0 uv' &= [uv]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 u'v \\ &= \left[(x+2)\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3} - \left[\frac{1}{9}\mathrm{e}^{3x}\right]_{-1}^0 \\ &= -\frac{2}{9}\mathrm{e}^{-3} + \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

2. Calculer $J = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$ en effectuant le changement de variable $t = \mathrm{e}^x$.

   Lorsque $x = 0$, $t = 1$ et lorsque $x = 1$, $t = \mathrm{e}$. De plus, $x = \ln(t)$, donc $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{t}$. Donc $J = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = [\arctan(t)]_1^{\mathrm{e}} = \arctan(\mathrm{e}) - \frac{\pi}{4}$. □

Question 3 (6 pts)

1. Calculer l'intégrale $I = \int_0^\pi \mathrm{e}^{2t}\cos(t)\mathrm{d}t$. On passe en complexe et on commence par calculer :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t &= \int_0^\pi \mathrm{e}^{(2+i)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2+i}[\mathrm{e}^{(2+i)t}]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2+i}(\mathrm{e}^{2\pi+i\pi} - 1) \\ &= \frac{2-i}{5}(-\mathrm{e}^{2\pi} - 1) \\ &= \frac{-2(\mathrm{e}^{2\pi}+1) + i(\mathrm{e}^{2\pi}+1)}{5}. \end{aligned}$$

   Donc $I = \mathrm{Re}\left(\int_0^\pi \mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{-2(\mathrm{e}^{2\pi}+1)}{5}$.

2. Calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+4}\mathrm{d}x$.
   On calcule le discriminant : $\Delta = 25-16 = 9$. Le polynôme a donc deux racines : -1 et -4. Donc $\frac{1}{x^2+5x+4} = \frac{1}{(x+1)(x+4)}$. On décompose en éléments simples : $\frac{1}{(x+1)(x+4)} = \frac{1/3}{x+1} + \frac{-1/3}{x+4}$.
   Donc :

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+4}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\left[\ln(|x+1|)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[\ln|x+4|\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\ln(5) + \frac{1}{3}\ln(4).
\end{aligned}$$

□

Contrôle de cours 6 - Primitives - Sujet B
Mercredi 13 novembre 2024

Question 1 (2 pts)

Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I et $a \in I$.

1. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
2. Si F est une primitive de f sur I et $a, b \in I$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$. $\square$

Question 2 (6 pts)

1. Calculer en utilisant une IPP : $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} (x+3)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

   On dérive $x+3$ et on intègre e^{2x} : $u = x+3$, $v' = \mathrm{e}^{2x}$, $u' = 1$ et $v = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$:

$$\begin{aligned} I = \int_{-1}^{0} uv' &= [uv]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} u'v \\ &= \left[(x+3)\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2} - \mathrm{e}^{-2} - \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\right]_{-1}^{0} \\ &= -\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2} + \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

$\square$

2. Calculer $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{2t\ln(t) + t}$ en effectuant le changement de variable $x = \ln(t)$.

   Lorsque $t = 1$, $x = 0$ et lorsque $t = \mathrm{e}$, $x = 1$. De plus, $t = \mathrm{e}^x$, donc $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Donc $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{2\,\mathrm{e}^x\,x + \mathrm{e}^x} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2x+1} = \frac{1}{2}[\ln(2x+1)]_0^1 = \frac{\ln(3)}{2}$.

Question 3 (6 pts)

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^t \sin(2t)\,\mathrm{d}t$. On passe en complexe et on commence par calculer :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^{2it}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{(1+2i)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{1+2i}[\mathrm{e}^{(1+2i)t}]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{1+2i}(\mathrm{e}^{\pi+2i\pi} - 1) \\ &= \frac{1-2i}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 1) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1 - 2i(\mathrm{e}^{\pi} - 1)}{5}. \end{aligned}$$

   Donc $I = \mathrm{Im}\left(\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^{2it}\,\mathrm{d}t\right) = \dfrac{-2(\mathrm{e}^{\pi} - 1)}{5}$.

2. Calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{1}{x^2+6x+8}\mathrm{d}x$.
   On calcule le discriminant : $\Delta = 36 - 32 = 4$. Le polynôme a donc deux racines : -2 et -4. Donc $\frac{1}{x^2+6x+8} = \frac{1}{(x+2)(x+4)}$. On décompose en éléments simples : $\frac{1}{(x+2)(x+4)} = \frac{1/2}{x+2} + \frac{-1/2}{x+4}$.
   Donc :

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+4}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(|x+2|)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln|x+4|\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(5) + \frac{1}{2}\ln(4). \end{aligned}$$

□