Chapitre 8 : Équations différentielles linéaires

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cela dépend du contexte.

I. Vocabulaire

Définition I.1. On appelle **équation différentielle linéaire**

- **d'ordre** 1 une équation différentielle du type :
$$\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t) \tag{E$_1$}$$
où α, β et γ sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ et définies sur un même intervalle I. Une solution est une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable vérifiant $\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t)$ pour tout $t \in I$.
- **d'ordre** 2 **à coefficients constants** une équation différentielle du type :
$$ay'' + by' + cy = f(t) \tag{E$_2$}$$
où $a \in \mathbb{K}^*$, et $b, c \in \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue. Une solution est une fonction $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable deux fois vérifiant $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$ pour tout $t \in I$.

Définition I.2. On appelle **équation différentielle homogène** associée à

- l'équation (E$_1$) l'équation
$$\alpha(t)y' + \beta(t)y = 0 \tag{H$_1$}$$
- l'équation (E$_2$) l'équation
$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{H$_2$}$$

Proposition I.1. *Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (H$_1$) (resp. de (H$_2$)), alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi solution de (H$_1$) (resp. de (H$_2$)).*

II. L'ordre 1

Pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1, on commence par se ramener à une EDL normalisée du type
$$y' + a(t)y = b(t) \tag{EN$_1$}$$
en divisant par $\alpha(t)$ (en faisant attention aux points où α s'annule).
L'équation homogène associée est
$$y' + a(t)y = 0. \tag{HN$_1$}$$

II.1. Résolution de l'équation homogène

Proposition II.1. *Soit $A : I \to \mathbb{K}$ une primitive de a. L'ensemble des solutions de l'équation (HN$_1$) est :*
$$S_0(I) = \left\{t \in I \mapsto C\mathrm{e}^{-A(t)} \in \mathbb{K} \mid C \in \mathbb{K}\right\}.$$

Remarque II.1. Lorsque $a(t)$ est constante, les solutions sont de la forme $t \mapsto C\mathrm{e}^{-at}$.

II.2. Solution de l'équation avec second membre

Proposition II.2. *Soient y_1 et y_2 deux solutions de (EN$_1$) : $y' + a(t)y = b(t)$. Alors $y_2 - y_1 \in S_0(I)$.*
Ainsi, si y_P est une solution particulière de (EN$_1$), alors l'ensemble des solutions de (EN$_1$) est :
$$S(I) = \left\{y_P + y_H \mid y_H \in S_0(I)\right\}.$$

II.3. Recherche de solutions particulières

On a le principe de superposition qui permet de couper le second membre en morceaux plus simples.

> **Proposition II.3.** *Si y_1 est solution de $(E_1) : y' + a(t)y = b_1(t)$ et y_2 est solution de $(E_2) : y' + a(t)y = b_2(t)$, alors $y_1 + y_2$ est solution de $(E_{1+2}) : y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$.*

Démonstration. *Comme $y_1' + ay_1 = b_1$ et $y_2' + ay_2 = b_2$, $(y_1 + y_2)' + a(y_1 + y_2) = b_1 + b_2$.* □

Il y a ensuite deux méthodes pour trouver une solution particulière : la première consiste à trouver une solution évidente, mais ne fonctionne pas toujours !
Sinon, on cherche une solution particulière de la forme $y_P(t) = C(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}$. On fait **varier la constante**.
On remplace y_P dans (EN_1) :

$$\begin{aligned} & y_P' + a(t)y_P = b(t) \\ \iff\quad & C'(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} - C(t)a(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} + a(t)C(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} = b(t) \\ \iff\quad & C'(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} = b(t) \\ \iff\quad & C'(t) = b(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} \end{aligned}$$

Il « suffit » de trouver une primitive de $b(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}$.

II.4. Problème de Cauchy

> **Définition II.1.** On appelle **problème de Cauchy** un système du type :
>
> $$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
>
> où $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ sont fixés.

Théorème II.4 (Cauchy-Lipschitz linéaire)

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une et une seule solution sur I.

III. L'ordre 2

III.1. Résolution de l'équation homogène

> **Définition III.1.** L'équation $aX^2 + bX + c = 0$ est l'**équation caractéristique** de (E_2).

> **Proposition III.1.** *Soit $r \in \mathbb{K}$. La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$ est solution de (H_2) ssi r est solution de l'équation caractéristique associée.*
> *Si de plus r est solution double de l'équation caractéristique, alors $x \mapsto x\,\mathrm{e}^{rx}$ est aussi solution de (H_2).*

> **Proposition III.2 (EDL d'ordre 2 avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).** *On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (E_2). L'ensemble des solutions à valeurs complexes de (H_2) sont :*
>
> 1. *Si $\Delta = 0$: $S_0 = \left\{t \mapsto (Ct + D)\,\mathrm{e}^{r_0 t} \mid C, D \in \mathbb{C}\right\}$, où r_0 est la racine double de l'équation caractéristique.*
> 2. *Si $\Delta \neq 0$: $S_0 = \left\{t \mapsto C_1\,\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{r_2 t} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{C}\right\}$, où r_1 et r_2 sont les deux racines de l'équation caractéristique.*

Proposition III.3 (EDL d'ordre 2 avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$). *Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique (avec $a,b,c\in\mathbb{R}$). L'ensemble des solutions de (H₂) à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont :*

1. *Si $\Delta=0$: $S_0=\{t\mapsto(Ct+D)\,\mathrm{e}^{r_0t}\mid C,D\in\mathbb{R}\}$, où r_0 est la racine double de l'équation caractéristique.*
2. *Si $\Delta>0$: $S_0=\{t\mapsto C_1\,\mathrm{e}^{r_1t}+C_2\,\mathrm{e}^{r_2t}\mid C_1,C_2\in\mathbb{R}\}$, où r_1 et r_2 sont les deux racines de l'équation caractéristique.*
3. *Si $\Delta<0$: $S_0=\{t\mapsto(C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t))\,\mathrm{e}^{\alpha t}\mid C_1,C_2\in\mathbb{R}\}=\{t\mapsto A\cos(\omega t-\varphi)\,\mathrm{e}^{\alpha t},A,\varphi\in\mathbb{R}\}$, où $r=\alpha+i\omega$ et $\overline{r}=\alpha-i\omega$ $(\alpha,\omega\in\mathbb{R})$ sont les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.*

Exemple III.1. Un exemple important qui apparaît souvent en physique : l'équation $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2u=0$, d'inconnue u. L'équation caractéristique associée est $X^2+\omega_0^2=0$ dont les solutions sont $\pm i\omega_0$. Ainsi, les solutions de l'équation sont :

- sur $\mathbb{C}$: $u(t)=C_1\,\mathrm{e}^{i\omega t}+C_2\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$, $C_1,C_2\in\mathbb{C}$;
- sur $\mathbb{R}$: $u(t)=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$;

III.2. Solution de l'équation avec second membre

Proposition III.4. *Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E₂) : $ay''+by'+cy=f(t)$. Alors $y_2-y_1\in S_0(I)$.*
Ainsi, si y_P est une solution particulière de (E₂), alors l'ensemble des solutions de (E₂) est :

$$S(I)=\{y_P+y_H\mid y_H\in S_0(I)\}.$$

III.3. Recherche de solutions particulières

On a toujours le principe de superposition.

Proposition III.5 (Principe de superposition). *Si y_1 est solution de $ay''+by'+cy=f_1(t)$ et y_2 est solution de $ay''+by'+cy=f_2(t)$, alors y_1+y_2 est solution de $ay''+by'+cy=f_1(t)+f_2(t)$.*

Méthode.
- Lorsque $f(t)$ est une constante, on cherche une solution particulière de (E₂) sous la forme d'une constante.
- lorsque $f(t)=A\,\mathrm{e}^{\lambda t}$, où $(\lambda,A)\in\mathbb{C}^2$, on cherche y_P sous la forme :
  - ▷ $y_P(t)=B\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ si λ n'est pas solution de l'équation caractéristique ;
  - ▷ $y_P(t)=Bt\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ si λ est une solution simple de l'équation caractéristique ;
  - ▷ $y_P(t)=Bt^2\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ si λ est une solution double de l'équation caractéristique.
- lorsque $f(t)=A\cos(\omega t)$ (ou $f(t)=A\sin(\omega t)$), avec $(A,\omega)\in\mathbb{R}^2$,
  1. on cherche une solution particulière y_P en remplaçant f par $g(t)=A\,\mathrm{e}^{i\omega t}$;
  2. on met y_P sous forme algébrique : $y_P(t)=y_1(t)+iy_2(t)$;
  3. y_1 (resp. y_2) est la solution particulière cherchée.

III.4. Problème de Cauchy

Définition III.2. On appelle **problème de Cauchy** un système du type :

$$\begin{cases} ay''+by'+cy=f(t)\\ y(t_0)=y_0 \text{ et } y'(t_0)=y_0' \end{cases}$$

où $t_0\in I$, $y_0,y_0'\in\mathbb{K}$ sont fixés.

Théorème III.6 (Cauchy-Lipschitz linéaire)

Soient a, b, $c\in\mathbb{K}$ avec $a\neq0$. Soit $f:I\to\mathbb{K}$ continue, $t_0\in I$ et $y_0,y_0'\in\mathbb{K}$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} ay''+by'+cy=f(t)\\ y(t_0)=y_0 \text{ et } y'(t_0)=y_0' \end{cases}$ admet une et une seule solution sur I.