Équations différentielles - Exercices

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$ et préciser la solution qui vaut 1 pour $t=0$ (ou $x=0$).

a) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-3u=2$

b) $y'+y=t^2+\mathrm{e}^t$

c) $y'-2y=2$

d) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y=\mathrm{e}^x$

e) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2y=\mathrm{e}^{2t}$

Exercice 2 (Décharge d'un condensateur). Un condensateur de capacité C est placé en série avec une résistance R. La tension initiale à ses bornes vaut E et on admet que cette tension vérifie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u=0 \\ u(0)=E \end{cases}$$

On pose $\tau=RC$.

1. Résoudre ce problème de Cauchy et représenter la solution u en fonction du temps.
2. (a) Quel pourcentage de la tension initiale représente la tension u à l'instant τ ? 3τ ? 5τ ?
   (b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de u en 0. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$ et préciser la solution qui vaut 1 pour $t=0$ (ou $x=0$).

a) $y'+2ty=\mathrm{e}^{t^2}$

b) $(1+x^2)y'+2xy=0$

c) $(1+4x^2)y'+y=1$

d) $y'+3t^2y=t^2+\mathrm{e}^{-t^3}$

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle précisé.

a) $(1+x^2)y'+xy=\sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$

b) $(1+x^2)y'=xy+\sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$

c) $xy'+y=\sin^3 x$, sur $\mathbb{R}_-^*$

d) $y'\cos x-y\sin x=\sin 2x$, sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

e) $y'+(\tan x)y=\cos^3 x$, sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

f) $y'+(\tan x)y=\sin x+\cos^3 x$, sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

g) $(1-x^2)y'-2xy=1$, sur $]-1,1[$

h) $x^3y'+4(1-x^2)y=0$, sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 5 (E3A 2019 PC). Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $W'(x)+\dfrac{1}{2(x+i)}W(x)=0$ avec $W(0)=\sqrt{\pi}$.

Exercice 6.

1. Résoudre l'équation $(E): xy'+y=1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. L'équation (E) admet-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$?
3. Reprendre les questions précédentes avec l'équation $(E): xy'-2y=x^3$.

Exercice 7.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation différentielle : $y''+y=e^{(1+2i)t}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y''+y=\mathrm{e}^t\cos 2t$.

Exercice 8.

1. Résoudre l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}-4\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+3u=\cos 2t$.
2. Résoudre l'équation différentielle : $y''-4y'+3y=e^t$.
3. Résoudre l'équation différentielle : $y''-4y'+3y=2e^t-3\cos 2t$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $y''+y'-6y=1$

b) $y''+4y'=4$

c) $y''+2y'-8y=e^{3t}$

d) $y"+3y'+2y=\mathrm{ch}(x)$

e) $y"+3y'+2y=\mathrm{sh}(x)$

f) $y''+2y'+y=2\mathrm{e}^{-x}$

g) $y''+4y=\cos(t)$

h) $y''+4y=\cos(2t)$

i) $y''+y'-2y=8\sin(2x)$

Exercice 10. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y''+2y'+10y=5 \\ y(0)=1 \text{ et } y'(0)=0 \end{cases}$$

Exercice 11. Résoudre $y'' - 2ay' + y = e^x$ en discutant suivant les valeurs du paramètre réel a.

Exercice 12. **Prétexte :** Soient x_1 et x_2 les abscisses en fonction du temps de deux masses reliées à deux points fixes et entre elles par trois ressorts de même raideur. On admet que x_1 et x_2 vérifient :

$$\begin{cases} x_1''(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2''(t) &= x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$$

1. En posant $y(t) = \dfrac{x_1(t) - x_2(t)}{2}$ et $z(t) = \dfrac{x_1(t) + x_2(t)}{2}$, résoudre le système proposé.
2. En déduire les fonctions x_1 et x_2 avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} x_1(0) &= 0 \\ x_1'(0) &= 0 \\ x_2(0) &= 1 \\ x_2'(0) &= 0 \end{cases}$$

Exercice 13. Soient a et b deux réels et c une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$t^2 y''(t) + aty'(t) + by(t) = c(t) \tag{E}$$

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On définit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(\mathrm{e}^x).$$

1. Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ en fonction de f et de ses dérivées.
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $f(t)$ en fonction de g.
3. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution d'une équation différentielle linéaire différentielle d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera.
4. Application :
   (a) Résoudre $y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^{2x}$.
   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}_*^+$ l'équation
   $$t^2 y'' - ty' + 5y = t^2.$$

Exercice 14. On considère l'équation différentielle $(E) : y^{(3)} - y = 0$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $g = f'' + f' + f$.
   Montrer que f est solution de (E) ssi g est solution d'une EDL à déterminer.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 15. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

Exercice 16. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) + \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 17. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y).$$

Exercice 18. Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\pi - x).$$