Contrôle de cours 7 - Calculs de primitives / EDL - Sujet A
Mercredi 20 novembre 2024

Question 1 (2 pts)

Résoudre l'équation différentielle $y' + \cos(3t)y = 0$.

L'équation est homogène. De plus, $\displaystyle\int^t \cos(3x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin(3t) + K$, donc $y' + \cos(3t)y = 0 \iff \exists C \in \mathbb{K} \mid y : t \mapsto C\,\mathrm{e}^{-\frac{\sin(3t)}{3}}$. □

Question 2 (5 pts)

On considère l'équation différentielle $\mathscr{E} : y' - 3y = \ln(t)\,\mathrm{e}^{3t}$.

1. L'équation homogène associée est
$$\mathscr{H} : y' - 3y = 0$$
2. Résoudre $\mathscr{H}$.
Comme $\displaystyle\int^t -3\mathrm{d}x = -3t + K$, $y' - 3y = 0 \iff \exists C \in \mathbb{K} \mid y : t \mapsto C\,\mathrm{e}^{3t}$.
3. On recherche une solution particulière de $\mathscr{E}$ sous la forme
$$y_p : t \mapsto C(t)\,\mathrm{e}^{3t} \text{ on fait varier la constante!}$$
4. Calculer $\displaystyle\int^t \ln(x)\mathrm{d}x$.
On fait une IPP : $\displaystyle\int^t \ln(x)\mathrm{d}x = [x\ln(x)]^t - \int^t 1\mathrm{d}x = t\ln(t) - t + K$, $K \in \mathbb{K}$.
5. Finir la résolution de $\mathscr{E}$.
On remplace y_P dans l'équation pour obtenir $C'(t)\,\mathrm{e}^{3t} = \ln(t)\,\mathrm{e}^{3t}$ donc $C'(t) = \ln(t)$. On a déjà une primitive de C', donc $y_P(t) = (t\ln(t) - t)\,\mathrm{e}^{3t}$. Donc $y' - 3y = \ln(t)\,\mathrm{e}^{3t} \iff \exists C \in \mathbb{K} \mid y : t \mapsto (t\ln(t) - t)\,\mathrm{e}^{3t} + C\,\mathrm{e}^{3t}$. □

Question 3 (3 pts)

On considère l'équation différentielle $\mathscr{E} : y'' - 4y' + 3y = e^{2t}$

1. L'équation homogène associée est
$$\mathscr{H} : y'' - 4y' + 3y = 0$$
2. Résoudre $\mathscr{H}$.
L'équation caractéristique est $X^2 - 4X + 3 = 0$ dont les racines sont 1 et 3. Donc $y'' - 4y' + 3y = 0 \iff \exists C_1, C_2 \in \mathbb{K} \mid y : t \mapsto C_1\,\mathrm{e}^{t} + C_2\,\mathrm{e}^{3t}$.
3. On recherche une solution particulière de $\mathscr{E}$ sous la forme
$$y_P : t \mapsto \alpha\,\mathrm{e}^{2t}$$
4. Finir la résolution de $\mathscr{E}$.
On dérive et on remplace dans $\mathscr{E}$ pour trouver $\alpha = -1$. Donc $y'' - 4y' + 3y = e^{2t} \iff \exists C_1, C_2 \in \mathbb{K} \mid y : t \mapsto -\mathrm{e}^{2t} + C_1\,\mathrm{e}^{t} + C_2\,\mathrm{e}^{3t}$. □

Contrôle de cours 7 - Calculs de primitives / EDL - Sujet B
Mercredi 20 novembre 2024

Question 1 (2 pts)

Résoudre l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{1+t^2} y = 0$.

L'équation est homogène. De plus, $\displaystyle\int^t \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(t) + K$, donc $y' + \dfrac{1}{1+t^2} y = 0 \iff \exists C \in \mathbb{K} \mid y : t \mapsto C\,\mathrm{e}^{-\arctan(t)}$. $\square$

Question 2 (5 pts)

On considère l'équation différentielle $\mathscr{E} : y' - 2y = \arctan(t)e^{2t}$

1. L'équation homogène associée est
$$\mathscr{H} : y' - 2y = 0$$
2. Résoudre $\mathscr{H}$.
Comme $\displaystyle\int^t -2\mathrm{d}x = -2t + K$, $y' - 2y = 0 \iff \exists C \in \mathbb{K} \mid y : t \mapsto C\,\mathrm{e}^{2t}$.
3. On recherche une solution particulière de $\mathscr{E}$ sous la forme
$$y_P : t \mapsto C(t)\,\mathrm{e}^{2t} \text{ on fait varier la constante!}$$
4. Calculer $\displaystyle\int^t \arctan(x)\mathrm{d}x$.
On fait une IPP : $\displaystyle\int^t \arctan(x)\mathrm{d}x = [x\arctan(x)]^t - \int^t \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = t\arctan(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + K$, $K \in \mathbb{K}$.
5. Finir la résolution de $\mathscr{E}$.
On remplace y_P dans l'équation pour obtenir $C'(t)\,\mathrm{e}^{2t} = \arctan(t)\,\mathrm{e}^{2t}$ donc $C'(t) = \arctan(t)$. On a déjà une primitive de C', donc $y_P(t) = \left(t\arctan(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right)\mathrm{e}^{2t}$. Donc $y' - 2y = \arctan(t)e^{2t} \iff \exists C \in \mathbb{K} \mid y : t \mapsto \left(t\arctan(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right)\mathrm{e}^{2t} + C\,\mathrm{e}^{2t}$. $\square$

Question 3 (3 pts)

On considère l'équation différentielle $\mathscr{E} : y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$

1. L'équation homogène associée est
$$\mathscr{H} : y'' - 3y' + 2y = 0$$
2. Résoudre $\mathscr{H}$.
L'équation caractéristique est $X^2 - 3X + 2 = 0$ dont les racines sont 1 et 2. Donc $y'' - 3y' + 2y = 0 \iff \exists C_1, C_2 \in \mathbb{K} \mid y : t \mapsto C_1\,\mathrm{e}^{t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t}$.
3. On recherche une solution particulière de $\mathscr{E}$ sous la forme
$$y_P : t \mapsto \alpha\,\mathrm{e}^{3t}$$
4. Finir la résolution de $\mathscr{E}$.
On dérive et on remplace dans $\mathscr{E}$ pour trouver $\alpha = \frac{1}{2}$. Donc sont donc $y'' - 3y' + 2y = e^{3t} \iff \exists C_1, C_2 \in \mathbb{K} \mid y : t \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t} + C_1\,\mathrm{e}^{t} + C_2\,\mathrm{e}^{2t}$. $\square$