Calculs de primitives - Exercices

Exercice 1. Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes, en précisant leurs ensembles de définition :

1. $f_1(x) = 6x^2 + 8x + 3$
2. $f_2(x) = 5a^2x^6$
3. $f_3(x) = x(x+a)(x+b)$
4. $f_4(x) = \sqrt{2ax}$
5. $f_5(x) = \dfrac{a}{a-x}$
6. $f_6(x) = \dfrac{2x+3}{2x+1}$
7. $f_7(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
8. $f_8(x) = \dfrac{x}{2x^2+3}$
9. $f_9(x) = a\,\mathrm{e}^{-bx}$
10. $f_{10}(x) = x\,\mathrm{e}^{-(x^2+1)}$
11. $f_{11}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$
12. $f_{12}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$
13. $f_{13}(x) = \cos\dfrac{x}{\sqrt{2}}$
14. $f_{14}(x) = \dfrac{1}{x+ia}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$, E3A PC 2020
15. $f_{15}(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $f_{16}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\sqrt{\mathrm{ch}(x)}}$
17. $f_{17}(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$
18. $f_{18}(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$
19. $f_{19}(x) = \dfrac{\ln^2(x+2)}{x+2}$

Exercice 2. Déterminer les primitives de :

1. $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$
2. $x \mapsto \sin^2 x$
3. $x \mapsto \cos^3(x)$
4. $x \mapsto \tan(x)$

Exercice 3.
1. Déterminer les primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{3x}\cos(2x)$.
2. Proposer une autre méthode pour trouver ces primitives.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (2t+1)\,\mathrm{e}^{-t}$. On cherche une primitive F de f sous la forme $F(t) = (at+b)\,\mathrm{e}^{-t}$.

1. Dériver F puis en déduire une primitive de $f(t) = (2t+1)\,\mathrm{e}^{t}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (2t+1)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
3. Proposer une autre méthode pour déterminer une primitive de f.

Exercice 5. Déterminer une primitive de chacune des fonctions :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4}$
2. $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x^2}$
3. $x \mapsto \dfrac{x+x^2}{1+x^2}$
4. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+5}$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-5x+6}$
6. $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2-4x+2}$

Exercice 6. Déterminer les expressions de :

1. $x \mapsto \displaystyle\int^x t\ln(t)\mathrm{d}t$
2. $x \mapsto \displaystyle\int^x t\arctan(t)\mathrm{d}t$
3. $x \mapsto \displaystyle\int^x (t-1)\sin(t)\mathrm{d}t$
4. $x \mapsto \displaystyle\int^x (t+1)\,\mathrm{ch}(t)\mathrm{d}t$
5. $x \mapsto \displaystyle\int^x \ln(t)\mathrm{d}t$

Exercice 7. Déterminer les primitives suivantes à l'aide d'un changement de variable :

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t}^3}$
2. $\displaystyle\int^x \frac{\ln(t)}{t+t\ln^2(t)}\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t+1}\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$
5. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)}$, $u = \cos(t)$
6. $I_4 = \displaystyle\int^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t$, $u = \sqrt{1+t}$.

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^1 (it+t^2)\mathrm{d}t$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{-1}^1 |x^2-x|\mathrm{d}x$
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{(2+i)t}\,\mathrm{d}t$
6. $I_6 = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$
7. $I_7 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)\mathrm{d}t$
8. $I_8 = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$
9. $I_9 = \displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$

10. $I_{10} = \displaystyle\int_0^1 5^x \mathrm{d}x$

11. $I_{11} = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5x+6}$

12. $I_{12} = \displaystyle\int_0^1 \frac{4x+2}{(x^2+x+3)^3}\mathrm{d}x$

13. $I_{13} = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + i\sin x}$

14. $I_{14} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{ix+1}$.

Exercice 9. 1. Trouver deux réels a et b tels que pour tous $x \notin \{1,2\}$, $\dfrac{x+2}{x^2-3x+2} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2}$ puis déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$.

2. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x+2}$ puis calculer $x \mapsto \displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)}$.
3. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx}{x^2+1} + \dfrac{c}{x^2+1}$ puis calculer $x \mapsto \displaystyle\int^x \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$.

1. En utilisant une IPP, trouver une relation entre J_n et J_{n+1}.
2. Déterminer l'expression de J_n en fonction de n.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x(\ln x)^n \mathrm{d}x$.

1. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} pour tout $n \geq 1$.
2. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
3. Déduire des deux questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\mathrm{e}^2}{n+3} \leq I_n \leq \dfrac{\mathrm{e}^2}{n+2}$.
4. En déduire que (I_n) et (nI_n) convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 12. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2 \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t+t\ln^2(t)}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x\cos(x)\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arcsin(x)\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2(\cos t)^3 \mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\mathrm{d}t$
12. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln(t))\mathrm{d}t$.

Exercice 13. Soient u, v et f trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f est continue. On note F une primitive de f. Soit G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

1. Exprimez G en fonction de F, de u et de v.
2. Montrez que si u et v sont dérivables alors G est dérivable et donnez sa dérivée.
3. Application : étudier la fonction $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t})\mathrm{d}t + \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t})\mathrm{d}t$.

Exercice 14. 1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\mathrm{d}t$ en posant $u = \dfrac{\pi}{2} - t$.

2. En déduire que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}$.

Exercice 15. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que : $\displaystyle\int_0^\pi t f(\sin(t))\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin(t))\mathrm{d}t$.
2. En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\mathrm{d}t$.

I. Indications - Solutions

Exercice 1 :

1. $F_1(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + C$
2. $F_2(x) = \dfrac{5a^2}{7} x^7 + C$
3. $F_3(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{(a+b)x^3}{3} + \dfrac{abx^2}{2} + C$
4. $F_4(x) = \sqrt{2ax}\,x + C$
5. $F_5(x) = -a \ln|a - x| + C$
6. $F_6(x) = x + \ln|2x+1| + C$
7. $F_7(x) = \sqrt{x^2+1} + C$
8. $F_8(x) = \dfrac{1}{4} \ln(2x^2+3) + C$
9. $F_9(x) = -\dfrac{a}{b} \mathrm{e}^{-bx} + C$
10. $F_{10}(x) = -\dfrac{1}{2} \mathrm{e}^{-(x^2+1)} + C$
11. $F_{11}(x) = \ln\left|\mathrm{e}^x - 1\right| + C$
12. $F_{12}(x) = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + C$
13. $F_{13}(x) = \sqrt{2} \sin \dfrac{x}{\sqrt{2}} + C$
14. $F_{14}(x) = \dfrac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) - i \arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$
15. $F_{15}(x) = \dfrac{\arcsin^2(x)}{2} + C$
16. $F_{16}(x) = 2\sqrt{\mathrm{ch}(x)} + C$
17. $F_{17}(x) = -\ln|1 + \cos(x)| + C$
18. $F_{18}(x) = -\arctan(\cos(x)) + C$
19. $F_{19}(x) = \dfrac{1}{3} \ln^3(x+2) + C$

Exercice 2 :

1. $\displaystyle\int^x \cos(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin^2(t) + C$
2. $\displaystyle\int^x \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$
3. $\displaystyle\int^x \cos^3(t)\,\mathrm{d}t = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} = \frac{3\sin(x)}{4} + \frac{\sin(3x)}{12} + C$
4. $\displaystyle\int^x \tan(t)\,\mathrm{d}t = \ln|\cos(x)| + C.$

Exercice 3 :

1. $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^{3t}\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{3x}\,\frac{3\cos(2x) + 2\sin(2x)}{13}.$
2. On applique deux IPP successives.

Exercice 4 :

1. $F'(t) = (-at - b + a)\,\mathrm{e}^{-t}$, donc $a = -2$ et $-b + a = 1$ et $b = -3$.
2. $\displaystyle\int_0^1 (2t+1)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = F(1) - F(0) = -5\,\mathrm{e}^{-1} - 3.$
3. On fait une IPP.

Exercice 5 :

1. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$
2. $\displaystyle\int^x \frac{1-t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
3. $\displaystyle\int^x \frac{t+t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x - \arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
4. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^2+2t+5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)$
5. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t^2-5t+6}\,\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|$
6. $\displaystyle\int^x \frac{1}{2t^2-4t+2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2(x-1)}.$

Exercice 6 :

1. $\displaystyle\int^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2\ln(x)}{2}$
2. $\displaystyle\int^x t\arctan(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^2\arctan(x)}{2} + \frac{\arctan(x)}{2} - \frac{x}{2}$
3. $\displaystyle\int^x (t-1)\sin(t)\,\mathrm{d}t = -(x-1)\cos(x) + \sin(x)$
4. $\displaystyle\int^x (t+1)\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t = (x+1)\,\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x)$

5. $\displaystyle\int^x \ln(t)\mathrm{d}t = x\ln(x) - x$

Exercice 7 :

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sqrt{t}^3} = 2arctan(\sqrt{x})$ avec $u=\sqrt{t}$
2. $\displaystyle\int^x \frac{\ln(t)}{t+t\ln^2(t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(1+\ln^2(x)\right)$ avec $u=\ln(t)$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t+1}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x - \ln(1+\mathrm{e}^x)$ avec $u=\mathrm{e}^x$
4. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1} = x - \ln(\mathrm{e}^x+1)$ avec $u=\mathrm{e}^t$
5. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos(x)-1}{\cos(x)+1}\right|$
6. $\displaystyle I_4 = \int^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\sqrt{1+x}^3 - 2\sqrt{1+x}.$

Exercice 8 :

1. $\displaystyle I_1 = \int_0^1 \mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^t}{t} - \frac{1}{t}.$
2. On linéarise $\displaystyle\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$. $\displaystyle I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$
3. $\displaystyle I_3 = \int_{-1}^1 (it+t^2)\mathrm{d}t = \frac{2}{3}.$
4. On coupe l'ntégrale suivant le signe de x^2-x. $\displaystyle I_4 = \int_{-1}^1 |x^2-x|\mathrm{d}x = 1.$
5. $\displaystyle I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{(2+i)t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{\pi}(1+2i)-2+i}{5}.$
6. On reconnaît $\displaystyle\frac{u'}{u}$ avec $u=\ln(x)$. $\displaystyle I_6 = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln 2.$
7. $\displaystyle I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2}.$
8. On reconnaît $u'u$, avec $u=\ln x$. $\displaystyle I_8 = \frac{3}{2}.$
9. On reconnaît $\displaystyle\frac{1}{2}u'\mathrm{e}^u$ avec $u=t^2$. $\displaystyle I_9 = \frac{\mathrm{e}-1}{2}.$
10. $\displaystyle I_{10} = \frac{4}{\ln 5}.$
11. On factorise : $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$, puis on écrit $\displaystyle\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$. $I_{11} = \ln(16/15)$.
12. On reconnaît $\displaystyle\frac{2u'}{u^3}$. $\displaystyle I_{12} = \frac{16}{225}.$
13. $I_{13} = -2i$.
14. On écrit $\displaystyle\frac{1}{ix+1} = \frac{1}{1+x^2} - i\frac{x}{1+x^2}$ puis on calcule l'intégrale de la partie réelle et celle de la partie imaginaire. $\displaystyle I_{14} = \frac{\pi}{4} - i\frac{\ln 2}{2}.$

Exercice 9 :

1. $\displaystyle\frac{x+2}{x^2-3x+2} = \frac{-3}{x-1} + \frac{4}{x-2}$ puis une primitive est $\displaystyle x \mapsto \ln\left|\frac{(x-2)^4}{(x-1)^3}\right|.$
2. $\displaystyle a=\frac{1}{2}, b=-1$ et $\displaystyle c=\frac{1}{2}$. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)} = \frac{\ln(|x|)+\ln(|x+2|)}{2} - \ln(|x+1|) + C.$
3. $a=-1$, $b=1$ et $c=1$. $\displaystyle\int^x \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x = \ln(|x+1|) + \frac{1}{2}\ln(|x^2+1|) + \arctan x + C.$

Exercice 10 :

1. On dérive $(1-t^2)^n$ et on intègre 1. On trouve $(2n+3)J_{n+1} = (2n+2)J_n$.
2. On montre par récurrence que $\displaystyle J_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$

3. $J_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{2k} \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 11 :

1. On dérive $(\ln x)^n$ et on primitive x. On trouve $I_n = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$.
2. $I_n - I_{n-1} = \int_1^{\mathrm{e}} x(\ln x)^{n-1}(\ln(x)-1)\mathrm{d}x$ pour $n \geq 1$. Or $\ln(x)-1 \leq 0$ et $x(\ln x)^{n-1} \geq 0$ sur l'intervalle $[1,\mathrm{e}]$. Donc $I_n - I_{n-1} \leq 0$.
3. $I_n \leq I_{n-1}$, donc $-\frac{n}{2} I_n \geq -\frac{n}{2} I_{n-1}$ et $I_n \leq \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n}{2} I_n$, ce qui donne $I_n \leq \frac{\mathrm{e}^2}{n+2}$. De même, $I_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$, donc $I_n \geq \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$, ce qui donne $I_n \geq \frac{\mathrm{e}^2}{n+3}$.
4. Théorème d'encadrement : $\lim I_n = 0$ et $\lim nI_n = \mathrm{e}^2$.

Exercice 12 :

1. On fait 2 IPP en primitivant 1 et en dérivant $(\ln x)^2$ puis $\ln x$. On trouve $\int_1^2 (\ln x)^2 \mathrm{d}x = 2\ln(2)^2 - 4\ln(2) + 2$.
2. On reconnait $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u = \mathrm{e}^x + 1$. $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}} \mathrm{d}x = 2\sqrt{\mathrm{e}+1} - 2\sqrt{2}$.
3. On fait le changement de variable $u = \ln t$. On trouve $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t + t\ln^2(t)} = \arctan(\ln(2))$.
4. On fait deux IPP en dérivant x^2 puis x. On trouve $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x)\mathrm{d}x = \pi - 2$.
5. On fait une IPP en dérivant arctan et on primitive 1. On trouve $\int_0^1 \arctan(x)\mathrm{d}x = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}$.
6. On fait le changement de variable $x = \sin t$ puis on linéarise. On trouve $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{16}$.
7. On applique la méthode du cours, ou bien on fait deux IPP. On trouve $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(x)\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}$.
8. On fait une IPP en dérivant $\arcsin(x)$ et en primitivant 1, ou bien on fait $u = -x$. On trouve $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arcsin(x)\mathrm{d}x = 0$.
9. Soit on linéarise, soit on pose $u = \sin t$. On trouve $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^3(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{15}$.
10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)}\mathrm{d}x$. On pose $u = \sin(x)$ et on trouve $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}$ puis on décompose en éléments simples. On trouve $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}x = \ln(1+\sqrt{2})$.
11. On fait une IPP en dérivant $\ln(1+t^2)$ et en primitivant 1. On trouve $\int_0^1 \ln(1+t^2)\mathrm{d}t = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$.
12. On fait deux IPP en dérivant $\sin(\ln(t))$ puis $\cos(\ln(t))$ et en primitivant 1. On trouve $\int_1^{\mathrm{e}^{\pi}} \sin(\ln(t))\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}$.

Exercice 13 :

1. $G(x) = F(v(x)) - F(u(x))$.
2. Par le TFA, F est de classe $\mathscr{C}^1$. Par composition, G est dérivable et $G' = v' \times f \circ v - u' \times f \circ u$.
3. Les fonctions $t \longmapsto \arccos(\sqrt{t})$, $t \longmapsto \arcsin(\sqrt{t})$ sont continues sur $[0,1]$. Les fonctions $x \longmapsto \cos^2(x)$ et $x \longmapsto \sin^2(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,1]$. Donc h est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $h'(x) = -2\sin(x)\cos(x)\arccos|\cos(x)| + 2\sin(x)\cos(x)\arcsin|\sin(x)|$. La fonction est π-périodique. Sur $[0,\pi/2]$, on trouve $h'(x) = 0$, sur $[\pi/2,\pi]$, $h'(x) = 0$. Donc h est constante et vaut $h(x) = h(0) = \int_0^1 \arccos(\sqrt{t})\mathrm{d} = \frac{\pi}{4}$ en faisant le changement de variable $t = \cos^2(u)$ puis une IPP.

Exercice 14 :

1. C'est immédiat.
2. On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\mathrm{d}t$. On a $I = J$ et $I + J = \frac{\pi}{2}$.

3. On fait le changement de variable $u = \sin(t)$. On trouve donc $\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 15 :

1. On fait le changement de variable $u = \pi - t$.
2. On trouve $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\mathrm{d} = \int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{2-\sin^2(t)}\mathrm{d} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}$ en posant $u = \cos(t)$.