

Résoudre un système avec le pivot de Gauss

Lorsqu'on veut résoudre un système du type :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \dots & & & & & & \end{array} \right.$$

où chaque \bullet représente un coefficient du système et les inconnues sont rangées chacune dans une colonne, on procède par étapes :

- **Étape 0** : si le coefficient (1,1) est déjà non nul, cette étape est inutile. On cherche un coefficient \star non nul (de préférence un 1) dans la première colonne et on le place en position (1, 1) en échangeant deux lignes. C'est le **pivot** de la première colonne.

Par exemple, on échange ici les deux premières lignes :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \dots & & & & & & \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \dots & & & & & & \end{array} \right.$$

- **Étape 1** : grâce à des opérations $L_i \leftarrow \bullet \times L_1 - \star \times L_i$, on élimine l'inconnue de toutes les lignes L_i situées sous le pivot ($i \geq 2$).

Si une ligne $0 = 0$ apparaît, on la supprime.

Si une ligne $0 = \bullet$ apparaît (avec $\bullet \neq 0$), on s'arrête : le système est incompatible!

On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \dots & & & & & & \end{array} \right.$$

- **Reprise des étapes 0 et 1** : on reprend les étapes 0 et 1 en « oubliant » la première ligne.

Si une colonne n'a pas de pivot, on passe à celle d'après.

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \dots & & & & & & \end{array} \right. \text{ devient } \left\{ \begin{array}{cccccc} \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \dots & & & & & & \end{array} \right. \text{ puis } \left\{ \begin{array}{cccccc} \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \dots & & & & & & \end{array} \right.$$

Lorsqu'on arrive à la dernière ligne, le système est **échelonné**.

- **Étape 2** : on part de la colonne j qui contient le dernier pivot. On élimine grâce à des opérations $L_i \leftarrow \bullet \times L_j - \star \times L_i$, on élimine l'inconnue de toutes les lignes L_i situées au-dessus du pivot ($i \geq j$).

On divise ensuite la ligne L_j par le pivot pour faire apparaître un 1

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \dots & & & & & & \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \dots & & & & & & \end{array} \right.$$

- **Reprise de l'étape 2** : on reprend l'étape 2 en « oubliant » la dernière ligne. On obtient à la fin un système **échelonné réduit** :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & 1 & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \dots & & & & & & \end{array} \right.$$

On exprime alors les inconnues correspondants aux pivots (les **inconnues principales**) en fonction des autres (les **paramètres**) s'il y en a.