Devoir Surveillé 02

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.

Exercice 1. Trois questions indépendantes.

1. Soient $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.
   (a) Écrire $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique.
   (b) Écrire z_1, z_2 et $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme trigonométrique.
   (c) En déduire que : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
   (d) Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ l'équation : $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x = 2$.
2. On note $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   (a) Donner $|j|$ et un argument de j.
   (b) Représenter 1, j et j^2 dans le plan complexe.
   (c) Montrer que $|j - j^2| = |1 - j|$ et $|1 - j^2| = |1 - j|$. *On essayera de limiter les calculs.*
   (d) Que peut-on en déduire sur le triangle dont les sommets ont pour affixes 1, j et j^2 ?
3. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $(1+i)^{2024}$.

Exercice 2. Sept questions indépendantes.

1. Soit $f : I \to J$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 et $a \in I$.
   (a) Donner la définition de f est impaire.
   (b) Donner la définition de f est croissante sur I.
   (c) Donner la définition de f est dérivable en a.
   (d) Donner la définition de f est majorée sur I.
   (e) Donner la définition de f est une bijection de I sur J.
2. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Donner la définition de $x \mapsto x^a$ et son ensemble de définition.
3. Soit $g : I \to J$ et $f : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes. Montrer que la fonction $f \circ g$ est croissante.
4. Montrer que si $f, g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ sont deux fonctions bornées, alors $f + g$ et fg sont bornées.
5. Soit $f : x \mapsto \sin(x)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   (b) Tracer dans l'ordre et sur le même graphique :
      - la tangente au point d'abscisse 0 ;
      - la courbe de f sur $[-\pi/2, \pi/2]$;
      - la courbe de arcsin ;
      - la courbe de $x \mapsto \arcsin(x+1)$.
6. Déterminer les limites suivantes :

(a) $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ lorsque $x \to 1$	(b) $x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ lorsque $x \to 0^+$	(c) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ lorsque $x \to 0$.

7. Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer son ensemble de définition et son ensemble de dérivabilité, puis calculer sa dérivée :

(a) $f_1 : x \mapsto x^{\pi}$	(b) $f_2 : x \mapsto \pi^x$	(c) $f_3 : x \mapsto \tan(\cos(x))$	(d) $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$

Exercice 3 (Cette fonction n'est pas nulle ?).
L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x).$$

1. Montrer que f est 2π-périodique. Que peut-on en déduire sur le graphe de f ?
2. Montrer que la fonction f est paire. Que peut-on en déduire sur le graphe de f ?
3. (a) Soient $p, q \in \mathbb{R}$.
      i. Factoriser par l'angle moitié : $\mathrm{e}^{ip} - \mathrm{e}^{iq}$.
      ii. En déduire une factorisation de $\sin(p) - \sin(q)$.
   (b) Démontrer $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -4\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
   (c) Donner le tableau de signe de $\cos(y)$ pour $y \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.
   (d) En déduire le tableau de signe de $\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$ pour $x \in [0,\pi]$.
   (e) Dresser le tableau de variations de f sur $[0,\pi]$. On précisera les valeurs $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $f(\pi)$.
4. (a) Tracer l'allure du graphe de f sur $[0,\pi]$.
   (b) En déduire l'allure du graphe de f sur $[-\pi,\pi]$.
   (c) Tracer l'allure du graphe de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Halte aux calculs !).

1. Déterminer tous les nombres complexes z non nuls tels que z et $\frac{1}{z}$ ont le même module.
2. Déterminer tous les nombres complexes non nuls tels que z, $\frac{1}{z}$ et $z-1$ ont le même module.
   On pourra justifier avec un dessin !

Exercice 5 (Des tangentes).
On note respectivement $\mathscr{L}$ et $\mathscr{E}$ les courbes d'équations $y = \ln(x)$ et $y = \mathrm{e}^x$ dans un repère orthonormal.

1. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. On note T_a la tangente à $\mathscr{E}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
   (b) Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. On note T'_b la tangente à $\mathscr{L}$ au point d'abscisse b. Donner une équation de T'_b.
   (c) Montrer qu'il existe une tangente commune à $\mathscr{E}$ en un point d'abscisse a et à la courbe $\mathscr{L}$ en un point d'abscisse $b > 0$ si et seulement si :
   $$\begin{cases} a + \ln(b) = 0 \\ b\ln(b) - \ln(b) - b - 1 = 0 \end{cases}$$
2. On définit la fonction φ sur $]0,+\infty[$ par : $\varphi(t) = t\ln(t) - \ln(t) - t - 1$.
   (a) Étudier les variations de φ sur l'intervalle $]0,1[$.
   (b) Justifier que φ réalise une bijection de $]0,1[$ sur un intervalle à préciser.
   (c) En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in]0,1[$.
   (d) Pour tout $x > 0$, calculer $\varphi(x) - x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.
   (e) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(x) = 0$ sur $]0,+\infty[$.
3. Existe-t'il une tangente commune aux courbes $\mathscr{E}$ et $\mathscr{L}$?
   Si oui, combien y en a-t-il ?
   Tracer les courbes $\mathscr{E}$ et $\mathscr{L}$ et les tangentes trouvées. On donne $\beta \approx 0,2$ et $\ln(\beta) \approx -1,5$.

Exercice 6 (C'est vrai ça ?).

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{ch}^2(x)$.
2. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\arctan(\mathrm{e}^x) - \arctan(\mathrm{sh}(x)) = \frac{\pi}{2}.$$

Correction du Devoir Surveillé 02

Correction de l'exercice 1 :

1. (a) On utilise le conjugué du dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}{1-i}\\ &= \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}\\ &= \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{2|1-i|^2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$.

(b) On calcule : $|z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$ et $|z_2| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$.

Puis, $\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{6}/2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_1 = \frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$, donc $\theta_1 \equiv -\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$.

Et, $\cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où $\theta_2 \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

Ainsi, $\boxed{z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ et } z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}$.

Donc $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi, $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}}$.

(c) Les deux valeurs demandées sont les parties réelles et imaginaires de $\frac{z_1}{z_2}$:

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

(d) On divise par 4 pour faire apparaître les valeurs précédentes :

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x = 2\\ \iff &\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos x + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sin x = \frac{1}{2}\\ \iff &\cos\frac{\pi}{12}\cos x + \sin\frac{\pi}{12}\sin x = \frac{1}{2}\\ \iff &\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\\ \iff &x-\frac{\pi}{12} \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \text{ ou } x-\frac{\pi}{12} \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]\\ \iff &x \equiv \frac{5\pi}{12}\,[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]\end{aligned}$$

Comme $x \in]-\pi, \pi]$, on a : $\boxed{S = \left\{\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{4}\right\}}$.

2. On met $1+i$ sous forme exponentielle : $1+i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$. Donc $(1+i)^{2023} = \sqrt{2}^{2023}\mathrm{e}^{i\frac{2023\pi}{4}} = 2^{1011}\sqrt{2}\mathrm{e}^{505i\pi+\frac{3i\pi}{4}} = -2^{1011}\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Donc $\boxed{\mathrm{Re}((1+i)^{2022}) = 2^{2011}}$ et $\boxed{\mathrm{Im}((1+i)^{2022}) = -2^{1011}}$.

Correction de l'exercice 2 :

1. (a) $\boxed{f \text{ est impaire ssi : } \forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)}$.

(b) $\boxed{f \text{ est croissante sur } I \text{ ssi : } \forall x, y \in I, \text{ si } x < y, \text{ alors } f(x) \leq f(y)}$.

(c) $\boxed{f \text{ est dérivable en } a \text{ ssi le taux d'accroissement } \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ admet une limite finie lorsque } h \to 0}$.

(d) $\boxed{f \text{ est majorée sur } I \text{ ssi : } \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I,\ f(x) \leq M}$.

(e) $\boxed{f \text{ est une bijection de } I \text{ sur } J \text{ ssi} : \forall y \in J, \exists! x \in I \mid f(x) = y}$.

2. $\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ x^a = e^{a\ln(x)}}$.
3. Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$. Comme g est croissante, $g(x) \leq g(y)$. Comme f est croissante, $f(g(x)) \leq f(g(y))$. Autrement dit, $f \circ g(x) \leq f \circ g(y)$ et $\boxed{f \circ g \text{ est croissante}}$.
4. Soit $f, g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. Supposons que f et g sont bornées. Alors il existe $M, M' \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in I, |f(x)| \leq M$ et $|g(x)| \leq M'$.
Donc $\forall x \in I, |(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M + M'$ et $\boxed{f + g \text{ est bornée}}$.
De plus, $\forall x \in I, |fg(x)| = |f(x)||g(x)| \leq MM'$, donc $\boxed{fg \text{ est bornée}}$.
5. (a) Une équation est donnée par $y = x$.
(b) On trace la droite, puis sinus puis on prend le symétrique par rapport à $y = x$ et enfin on décale de 1 vers la gauche.
6. (a) $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x}{x+1} \xrightarrow[x \to 1]{} \dfrac{1}{2}$.
(b) Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$, donc $-x \leq x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq x$. Par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0}$.
(c) $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$. Or $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0}$ est le taux d'accroissement de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 1. Comme cette fonction est dérivable en 0, $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \dfrac{1}{1+0} = 1$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1}$.
7. (a) $f_1 : x \mapsto x^\pi$: par définition, $x^\pi = e^{\pi\ln(x)}$, donc f_1 est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.
De plus, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_1'(x) = \dfrac{\pi}{x} e^{\pi\ln(x)} = \pi x^{\pi - 1}}$.
(b) $f_2 : x \mapsto \pi^x$: par définition, $\pi^x = e^{x\ln(\pi)}$, donc f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f_2'(x) = \ln(\pi)\pi^x}$.
(c) $f_3 : x \mapsto \tan(\cos(x))$: la fonction tangente est définie et dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\dfrac{\pi}{2} < -1 \leq \cos(x) \leq 1 < \dfrac{\pi}{2}$, donc f_4 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f_4'(x) = -\sin(x)(1 + \tan^2(\cos(x)))}$.
(d) $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4 > 0 \iff x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$. Donc f_4 est définie sur $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ et dérivable sur $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$, et $\boxed{\forall x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[,\ f_4'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}}$.

Correction de l'exercice 3 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x + 2\pi) = \cos(2x + 4\pi) - 2\cos(x + 2\pi) = \cos(2x) - 2\cos(x)$ car cos est 2π périodique. Donc $f(x + 2\pi) = f(x)$. Ainsi $\boxed{f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}$.
Le graphe de f est donc invariant par translation de vecteur $(2\pi, 0)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(-x) = \cos(-2x) - 2\cos(-x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$ car cos est paire. Donc $f(-x) = f(x)$. Ainsi $\boxed{f \text{ est paire}}$.
Le graphe de f est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
3. (a) i. $\boxed{e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p-q}{2}}\right) = 2i\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}}$.
ii. On prend la partie imaginaire :

$$\begin{aligned}
\sin(p) - \sin(q) &= \operatorname{Im}\left(e^{ip} - e^{iq}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) + i\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)}$.

(b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2\sin(2x) + 2\sin(x) = 2(\sin(x) - \sin(2x))$. On utilise la formule de la question précédente avec $p = x$ et $q = 2x$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4\sin\left(\dfrac{x - 2x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x + 2x}{2}\right)$, donc $\boxed{f'(x) = -4\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{3x}{2}\right)}$ car sin est impaire.

(c)

x	0		$\pi/2$		$3\pi/2$
$\cos(y)$		$+$	0	$-$	0

(d)

x	0		$\pi/3$		π
$\cos(3x/2)$		$+$	0	$-$	0

(e) Pour tout $x \in [0,\pi]$, $x/2 \in [0,\pi]$, donc $\sin(x/2) \geq 0$.

x	0		$\pi/3$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-3/2$	$\nearrow$	3

4. (a) On utilise le tableau de variations : on place les valeurs et les tangentes horizontales.
   (b) On fait la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
   (c) On répète.

Correction de l'exercice 4 :

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| \iff |z|^2 = 1 \iff |z| = 1$ car $|z| \in \mathbb{R}_+$. Donc l'ensemble des nombres complexes z non nuls tels que z et $\frac{1}{z}$ ont le même module est $\boxed{\text{le cercle trigonométrique}}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}^3$. Alors $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z| \iff |z| = 1 = |1-z| \iff z$ est à l'intersection des cercles de rayon 1 centrés en $(0,0)$ et $(1,0)$. Or, ces deux cercles se coupent en $e^{\pm\frac{i\pi}{3}}$ (faire un dessin!). Donc les complexes z non nuls tels que z, $\frac{1}{z}$ et $z-1$ ont le même module sont $\boxed{e^{\pm\frac{i\pi}{3}}}$.

Correction de l'exercice 5 :

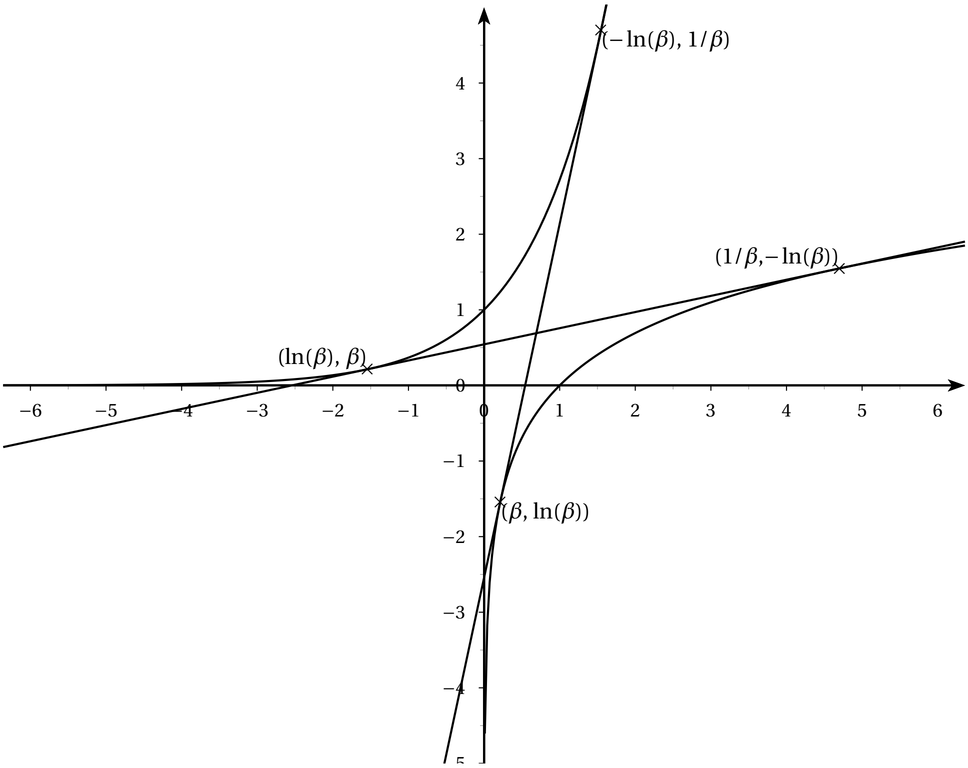
1. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. On applique la formule du cours : $\boxed{T_a : y = e^a(x-a) + e^a}$.
   (b) Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. On applique encore la formule : $\boxed{T'_b : y = \frac{1}{b}(x-b) + \ln(b)}$.
   (c) Il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $T_a = T'_b$ ssi les deux droites ont même pente et même coefficient directeur, c'est à dire ssi :
$$\begin{cases} e^a = \frac{1}{b} \\ e^a(1-a) = \ln(b) - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\ln(b) \\ \frac{1}{b}(1+\ln(b)) = \ln(b) - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a + \ln(b) = 0 \\ b\ln(b) - b - 1 - \ln(b) = 0 \end{cases}$$
2. (a) La fonction φ est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $t \in]0,+\infty[$, $\varphi'(t) = \ln(t) + 1 - \frac{1}{t} - 1 = \ln(t) - \frac{1}{t}$. Or $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto -\frac{1}{t}$ sont croissantes, donc φ' est croissante. Comme $\varphi'(1) = -1$, on a pour tout $t \in]0,1]$, $\varphi'(t) \leq -1 < 0$. Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est strictement décroissante sur }]0,1[}$.
   (b) La fonction φ est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$, donc d'après le TBM, elle réalise une bijection de $]0,1[$ sur $]\lim_{t\to1}\varphi(t), \lim_{t\to0}\varphi(t)[$. Or $\varphi(t) \xrightarrow[t\to0]{} +\infty$ par croissances comparées, et $\varphi(t) \xrightarrow[t\to1]{} -2$. Donc $\boxed{\varphi \text{ est une bijection de }]0,1[\text{ sur }]-2,+\infty[}$.
   (c) Comme φ est une bijection de $]0,1[$ sur $]-2,+\infty[$ et que $0 \in]-2,+\infty[$, 0 a un unique antécédent par φ. Autrement dit, $\boxed{\varphi(x) = 0 \text{ a une unique solution sur }]0,1[}$.
   (d) Soit $x > 0$.
$$\varphi(x) - x\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = x\ln(x) - \ln(x) - x - 1 - x\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} - 1\right) = x\ln(x) - \ln(x) - x - 1 + \ln(x) - x\ln(x) + 1 + x = 0$$
   Donc $\boxed{\forall x > 0,\ \varphi(x) = x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}$.

(e) Soit $x \in]0,+\infty[$ une solution de $\varphi(x) = 0$. Déjà, $x \neq 1$ car $\varphi(1) = -2$. Si $x \in]0,1[$, alors $x = \beta$. Si $x > 1$, alors $\dfrac{1}{x} \in]0,1[$, donc $\dfrac{1}{x} = \beta$. Ainsi, les deux solutions de $\varphi(x) = 0$ sont $\boxed{\beta \text{ et } \dfrac{1}{\beta}}$.

3. Reprenons le système de la question 1c :

$$\begin{cases} a + \ln(b) = 0 \\ b\ln(b) - b - 1 - \ln(b) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = \beta \\ a = -\ln(\beta) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} b = \dfrac{1}{\beta} \\ a = \ln(\beta) \end{cases}$$

Il y a donc deux tangentes aux courbes $\mathscr{E}$ et $\mathscr{L}$. Les deux tangentes sont d'ailleurs symétriques par rapport à la droite $y = x$.



Correction de l'exercice 6 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+\mathrm{sh}^2(x) = 1+\dfrac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{4} = \dfrac{4+e^{2x}-2+\mathrm{e}^{2x}}{4} = \dfrac{e^{2x}+2+\mathrm{e}^{-2x}}{4} = \dfrac{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}{2^2}$, Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 1+\mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{ch}^2(x)}$.

2. Posons $f : x \mapsto 2\arctan(\mathrm{e}^x) - \arctan(\mathrm{sh}(x))$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} - \frac{\mathrm{ch}(x)}{1+\mathrm{sh}(x)^2} \\ &= \frac{2\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} - \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \\ &= \frac{2}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x} - \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \end{aligned}$$

donc $f'(x) = 0$. Ainsi, f est constante sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) = 2\arctan(1) - \arctan(0) = 2\dfrac{\pi}{4}$, d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 2\arctan(\mathrm{e}^x) - \arctan(\mathrm{sh}(x)) = \frac{\pi}{2}.}$$