Devoir Surveillé 03

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.

Exercice 1 (Trois questions indépendantes).

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{C}$. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x^{i+j}$.
2. (a) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{C}$: $x^2 - x + 1 - i = 0$.
   (b) Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^6 - z^3 + 1 - i = 0$.
3. Soit $n \geq 2$ un entier naturel. On note $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.
   (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$.
   (b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$.
   (c) En déduire l'expression, en fonction de n, de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|^2$.

Exercice 2 (Une suite de sommes).

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^3(\theta)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^3(3^k x)}{3^k}$.
   Simplifier l'expression de $g_n(x)$.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(g_n(x))_{n \geq 1}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 3 (Un peu de géométrie).

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit z un nombre complexe fixé. On considère les points A, B et M d'affixes respectives 1, i et z.
Soit N l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Soient P, Q, R et S les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BM]$, $[MN]$ et $[NA]$.

1. Quelles sont les affixes des points N, P, Q, R et S ?
2. Montrer que le quadrilatère $PQRS$ est un carré.
3. On pose $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ fixé et $\theta \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de θ l'aire du carré $PQRS$ est-elle maximale ?

Exercice 4 (Des coefficients binomiaux).

1. Énoncer la formule du binôme de Newton.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit $S_n = \sum_{i=n}^{2n} \binom{2n}{i} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \cdots + \binom{2n}{2n}$.

2. Calculer S_1, S_2 et S_3.
3. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n}$.
4. (a) Montrer, en utilisant le changement d'indice $j = 2n - i$ que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{j}$.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}$.
5. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = \frac{1}{2^{2p}}\binom{2p}{p}$.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul p : $u_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} u_p$.

   (b) En déduire, par récurrence, que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$.

   (c) Justifier que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, u_p est positif, puis en déduire la limite de u_p lorsque p tend vers $+\infty$.

Exercice 5 (Des sommes bornées).

1. (a) Énoncer l'inégalité triangulaire pour deux complexes.

   (b) Démontrer par récurrence sur $n \geq 2$ que :

$$\forall z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}, \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0\,[2\pi]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \mathrm{e}^{\frac{in\theta}{2}} \dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

   (b) En déduire les valeurs de $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S_n| \leq M$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k}$.

   (a) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{e}^{ik\theta} = S_k - S_{k-1}$.
   On fera attention à changer le nom de l'indice de sommation pour éviter les confusions.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) S_k\right) + \frac{S_n}{n+1} - 1$.

   (c) En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.
   On pourra utiliser la question 1b.

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (a) Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{2n} - V_n \geq \frac{1}{2}$.

   (c) En déduire que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée.

Exercice 6 (Des équations complexes).

1. Soit $q \in \mathbb{C}$ et $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a \leq b$. Rappeler l'expression sans $\sum$ de $\sum_{k=a}^{b} q^k$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Énoncer le théorème concernant les solutions de l'équation $z^n = 1$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

3. On considère l'équation :

$$(E) \quad 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} z^k + z^n = 0.$$

   (a) Justifier que 1 n'est pas solution de (E).

   (b) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que z est solution de (E) si et seulement si $(z^n - 1)(z+1) = 0$.

4. Soit $\varphi \in [0, 2\pi[$. Résoudre, en fonction de φ, l'équation $\frac{1+iu}{1-iu} = e^{i\varphi}$, d'inconnue $u \in \mathbb{C}$.

5. Montrer, sans les calculer, que les solutions de l'équation $\left(\frac{1+iu}{1-iu}\right)^n = 1$ d'inconnue $u \in \mathbb{C}$, sont réelles.

6. Résoudre $\left(\frac{1+iu}{1-iu}\right)^n = 1$. On précisera en particulier le nombre de solutions en fonction de n.

7. Résoudre l'équation d'inconnue $u \in \mathbb{C}$:

$$(E') \quad 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1+iu}{1-iu}\right)^k + \left(\frac{1+iu}{1-iu}\right)^n = 0.$$

   On précisera le nombre de solutions en fonction de n.

Correction du Devoir Surveillé 03

Correction de l'exercice 1 :

1. Notons $S = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} x^{i+j}$. On commence par séparer les sommes : $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} x^{i+j} = \sum_{i=1}^{n} x^i \sum_{j=i}^{n} x^j$.
   Si $x=1$, on a $S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n}(n-i+1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
   Si $x\neq 1$: $S = \sum_{i=1}^{n} x^{2i}\dfrac{1-x^{n-i+1}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}\sum_{i=1}^{n} x^{2i} - x^{n+i+1} = \dfrac{1}{1-x}\sum_{i=1}^{n} x^{2i} - \dfrac{x^{n+1}}{1-x}\sum_{i=1}^{n} x^i$.
   Si $x=-1$, $S = \dfrac{n}{2} + \dfrac{(-1)^{n+1}(1-(-1)^n)}{4}$.
   Enfin, si $x^2\neq 1$: $S = x^2\dfrac{1-x^{2n}}{(1-x)(1-x^2)} - \dfrac{x^{n+2}(1-x^n)}{(1-x)^2}$.
   En conclusion :
   - $\boxed{\text{si } x=1 : S = \dfrac{n(n+1)}{2}}$
   - $\boxed{\text{si } x=-1 : S = \dfrac{n}{2} + \dfrac{(-1)^{n+1}(1-(-1)^n)}{4}}$
   - $\boxed{\text{si } x=1 : S = x^2\dfrac{1-x^{2n}}{(1-x)(1-x^2)} - \dfrac{x^{n+2}(1-x^n)}{(1-x)^2}.}$

2. (a) Le discriminant vaut $\Delta = 1-4(1-i) = -3+4i$. On cherche $a, b\in\mathbb{R}$ tels que $\Delta = (a+ib)^2$, c'est-à-dire, $a^2-b^2=-3$, $2ab=4$ et $a^2+b^2=5$.
   Donc $a^2=1$ puis $a=\pm1$ et $b=\pm2$. Donc $\Delta = (1+2i)^2$. Les solutions sont donc $\boxed{\dfrac{-2i}{2} = -i \text{ et } \dfrac{2+2i}{2} = 1+i}$.

   (b) D'après la question précédente, $z^6 - 9iz^3 - 8 = 0 \iff (z^3)^2 - 9iz^3 - 8 = 0 \iff z^3 = -i$ ou $z^3 = 1+i$.
   Or, $-i = \mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{2}}$ et $1+i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}}$.
   Donc $z^3 = -i \iff \dfrac{z^3}{\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{2}}} = 1 \iff \left(\dfrac{z}{\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2}}}\right) = 1 \iff \exists k\in[\![0,2]\!] \mid z = i\,\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{3}}$.
   Puis, $z^3 = 1+i \iff \dfrac{z^3}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}} = 1 \iff \left(\dfrac{z}{2^{1/6}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}}\right)^3 = 1 \iff \exists k\in[\![0,2]\!] \mid z = 2^{1/6}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}\,\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{3}}$.
   Les solutions de $z^6 - 9iz^3 - 8 = 0$ sont donc $\boxed{i\,\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{3}} \text{ et } 2^{1/6}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}\,\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{3}} \text{ pour } k=0,1 \text{ et } 2}$.

3. (a) Comme $n\geq 2$, $\omega\neq 1$, donc $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k = \dfrac{1-\omega^n}{1-\omega}$, et comme $\omega^n = 0$, $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k = 0}$.

   (b) D'après la question précédente, $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k\right) = 0}$.

   (c) Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$, $|\omega^k-1|^2 = (\omega^k-1)\overline{\omega^k-1} = (\omega^k-1)(\omega^{-k}-1) = 2-(\omega^k+\omega^{-k}) = 2-2\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$.

   D'après la question précédente, $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}|\omega^k-1|^2 = 2n}$.

Correction de l'exercice 2 :

1. On passe par les formules d'Euler :
$$\sin^3(\theta) = \left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{\mathrm{e}^{3i\theta} - 3\,\mathrm{e}^{2i\theta}\,\mathrm{e}^{-i\theta} + 3\,\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{-2i\theta} - \mathrm{e}^{-3i\theta}}{-8i} = \frac{2i\sin(3\theta) - 6i\sin(\theta)}{-8i}$$
   Donc $\boxed{\sin^3(\theta) = \dfrac{3}{4}\sin(\theta) - \dfrac{1}{4}\sin(3\theta)}$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$. On utilise la question précédente :
$$\begin{aligned} g_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{3}{4}\sin(3^k x) - \frac{1}{4}\sin(3^{k+1}x)}{3^k} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(3^k x)}{3^{k-1}} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(3^{k+1}x)}{3^k} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\sin(3^{i+1}x)}{3^i} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(3^{k+1}x)}{3^k} \\ &= \frac{1}{4}\sin(3x) - \frac{1}{4}\frac{\sin(3^{n+1}x)}{3^n} \end{aligned}$$
   Ainsi, $\boxed{g_n(x) = \dfrac{\sin(3x)}{4} - \dfrac{\sin(3^{n+1}x)}{4\times 3^n}}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(3^{n+1}x) \leq 1$, on a $-\frac{1}{3^n} \leq \frac{\sin(3^{n+1}x)}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$. Puis, $\pm\frac{1}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc par encadrement, $\frac{\sin(3^{n+1}x)}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   D'après la question précédente : $\boxed{g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sin(3x)}{4}}$.

Correction de l'exercice 3 :

1. On fait bien sûr un dessin. On a $\boxed{z_N = iz,\ z_P = \frac{1+i}{2},\ z_Q = \frac{z+i}{2},\ z_R = \frac{z+iz}{2} \text{ et } z_S = \frac{iz+1}{2}}$.
2. On a : $\frac{z_{\overrightarrow{PS}}}{z_{\overrightarrow{PQ}}} = \frac{iz+1-1-i}{z+i-1-i} = \frac{i(z-1)}{z-1} = i$, donc on obtient $\overrightarrow{PS}$ à partir de $\overrightarrow{PQ}$ par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   On a aussi : $\frac{z_{QR}}{z_{QP}} = \frac{z+iz-z-i}{1+i-z-i} = \frac{i(z-1)}{1-z} = -i$, donc on obtient $\overrightarrow{QR}$ à partir de $\overrightarrow{QP}$ par rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

   Ainsi, $\boxed{PQRS \text{ est un carré}}$.
3. On calcule $PS = |z_{\overrightarrow{PS}}| = \left|\frac{ir\,e^{i\theta}-i}{2}\right| = \left|\frac{r\,e^{i\theta}-1}{2}\right|$.

   Donc l'aire du carré vaut $\mathscr{A} = PS^2 = \frac{1}{4}|r\,e^{i\theta}-1|^2 = \frac{(r\,e^{i\theta}-1)(r\,e^{-i\theta}-1)}{4} = \frac{r^2 - r(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+1}{4} = \frac{r^2-2r\cos(\theta)+1}{4}$.

   Donc l'aire est maximale lorsque $\cos(\theta)$ est minimal, c'est-à-dire lorsque $\boxed{\theta = -\pi[2\pi]}$.

Correction de l'exercice 4 :

1. Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
2. $S_1 = \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 2+1$ et $\boxed{S_1 = 3}$.

   $S_2 = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 6+4+1$, donc $\boxed{S_2 = 11}$.

   $S_3 = \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 20+15+6+1$, donc $\boxed{S_3 = 42}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après Newton, $\boxed{\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k 1^{n-k} = 2^{2n}}$.
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $j = 2n-i$, de sorte que : $S_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{2n-j}$, et par symétrie du triangle de Pascal, $\boxed{S_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{j}}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 3, $2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} + \sum_{k=n}^{2n} \binom{2n}{k} - \binom{2n}{n}$.

   D'après la question précédente, $2^{2n} = 2S_n + \binom{2n}{n}$.

   Ainsi, $\boxed{S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}}$.
5. (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

   $$u_{p+1} = \frac{1}{2^{2p+2}}\binom{2p+2}{p+1} = \frac{1}{2^{2p}}\frac{1}{4}\frac{(2p+2)!}{(p+1)!(p+1)!} = \frac{1}{2^{2p}}\frac{1}{4}\frac{(2p+2)(2p+1)}{(p+1)^2}\binom{2p}{p} = \frac{1}{2^{2p}}\frac{1}{2}\frac{(2p+1)}{p+1}\binom{2p}{p} = \frac{1}{2^{2p}}\frac{2p+1}{2p+2}\binom{2p}{p}$$

   Ainsi, $\boxed{u_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2}\binom{2p}{p}}$.

   (b)
   - Initialisation : pour $p = 1$, $u_1 = \frac{1}{4}\binom{2}{1} = \frac{1}{2}$, et $\frac{1}{\sqrt{3}} \geq \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$. D'où $u_1 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.
   - Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$.

     On a donc $u_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} u_p \leq \frac{2p+1}{2p+2}\frac{1}{\sqrt{2p+1}} = \frac{\sqrt{2p+1}}{2p+2}$ par hypothèse de récurrence.

     Comparons à $\frac{1}{\sqrt{2(p+1)+1}} = \frac{1}{\sqrt{2p+3}}$:

     $$\frac{\frac{\sqrt{2p+1}}{2p+2}}{\frac{1}{\sqrt{2p+3}}} = \frac{\sqrt{2p+1}\sqrt{2p+3}}{2p+2}$$

     En mettant au carré, on obtient $\frac{4p^2+8p+3}{4p^2+8p+4} \leq 1$. Ainsi, $\frac{\sqrt{2p+1}}{2p+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2p+3}}$, donc $u_{p+1} \leq \frac{1}{\sqrt{2p+3}}$.

   D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}}}$.

(c) Comme pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u_p = \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n} \geq 0$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2p+1}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, par encadrement, $\boxed{u_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0}$.

Correction de l'exercice 5 :

1. (a) $\boxed{\text{Pour tout } a, b \in \mathbb{C},\ |a+b| \leq |a|+|b|}$.

(b) Posons, pour tout $n \geq 2$, $\mathscr{P}_n$: « $\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ ».

- Initialisation : pour $n = 2$, c'est la question précédente.
- Hérédité : Soit $n \geq 2$. Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
  Soient $z_1, \dots, z_{n+1} \in \mathbb{C}$. On pose $a = z_{n+1}$ et $b = z_1 + \cdots + z_n$. On applique l'inégalité triangulaire pour 2 complexes :

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = |a+b| \leq |a|+|b| = |z_{n+1}| + \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|.$$

D'après $\mathscr{P}_n$, on trouve :

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leq |z_{n+1}| + \sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

D'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \geq 2,\ \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C},\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\theta \not\equiv 0\,[2\pi]$, on a $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 1$. Donc :

$$S_n = \frac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{i(n+1)\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{i\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{i\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{i\theta}{2}}\right)} = \mathrm{e}^{\frac{in\theta}{2}} \frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

donc $\boxed{S_n = \mathrm{e}^{\frac{in\theta}{2}} \dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) &= \mathrm{Re}\,(S_n) = \cos\left(\frac{in\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) &= \mathrm{Im}\,(S_n) = \sin\left(\frac{in\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\end{aligned}}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|S_n| = \left|\mathrm{e}^{\frac{in\theta}{2}}\right| \frac{\left|\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$$

car $\left|\mathrm{e}^{\frac{in\theta}{2}}\right| = 1$ et $\left|\sin\left(\dfrac{(n+1)\theta}{2}\right)\right| \leq 1$. Donc en prenant $M = \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S_n| \leq M$. $\boxed{\text{La suite } (S_n) \text{ est bornée}}$.

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$: $S_k - S_{k-1} = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{e}^{ij\theta} - \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{e}^{ij\theta} = \mathrm{e}^{ik\theta} + \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{e}^{ij\theta} - \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{e}^{ij\theta}$, donc $\boxed{S_k - S_{k-1} = \mathrm{e}^{ik\theta}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}U_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{S_j}{j+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{S_j}{j+1} + \frac{S_0}{1} - \frac{S_n}{n+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{S_k}{k} - \frac{S_k}{k+1}\right) - S_0 + \frac{S_n}{n+1}\end{aligned}$$

et comme $S_0 = 1$, on trouve $\boxed{U_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) S_k - 1 + \frac{S_n}{n+1}}$.

(c) D'après la question 2c, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|S_k| \leq M$, donc d'après la question précédente et l'inégalité triangulaire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|U_n| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right| M + \frac{M}{n+1} + 1.$$

Or, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \geq 0$, donc

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|U_n| \leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) M + \frac{M}{n+1} + 1 = M + 1$$

donc $\boxed{\text{la suite } (U_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée}}$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n} \geq 0$. Donc $\boxed{(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $V_{2n} - V_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

   Or, pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$, donc $V_{2n} - V_n \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n}$, donc $\boxed{V_{2n} - V_n \geq \frac{1}{2}}$.

   (c) Si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ était bornée, comme elle est croissante elle serait convergente vers une certaine limite $\ell \in \mathbb{R}$. Mais alors $V_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, donc $V_{2n} - V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui contredit la question précédente. Donc $\boxed{(V_n) \text{ n'est pas bornée}}$.

Correction de l'exercice 6 :

1. $\boxed{\text{Si } q = 1,\ \sum_{k=a}^{b} q^k = b - a + 1 \text{ et si } q \neq 1,\ \sum_{k=a}^{b} q^k = q^a \frac{1 - q^{b-a+1}}{1-q}}$.

2. $\boxed{\text{Notons } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}. \text{ L'ensemble des solutions de l'équation } z^n = 1 \text{ est } \left\{\omega^k, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$.

3. (a) En prenant $z = 1$, on obtient $1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} 1^k + 1^n = 2n \neq 0$ car $n \geq 2$. Donc $\boxed{1 \text{ n'est pas solution de } (E)}$.

   (b) Comme $z \neq 1$, $\sum_{k=1}^{n-1} z^k = z\frac{1 - z^{n-1}}{1-z}$, donc z est solution de (E) ssi :

$$1 + 2z\frac{z^{n-1} - 1}{z-1} + z^n = 0 \iff \frac{z - 1 + 2z^n - 2z + z^{n+1} - z^n}{z-1} = 0 \iff z^{n+1} + z^n - z - 1 = 0 \iff (z^n - 1)(z+1) = 0$$

4. $\frac{1+iu}{1-iu} = e^{i\varphi} \iff 1 + iu = e^{i\varphi} - iue^{i\varphi} \iff ui\left(1 + e^{i\varphi}\right) = e^{i\varphi} - 1$.
   Si $\varphi = \pi$, alors l'équation s'écrit $0 = -2$ et n'a donc pas de solution.
   Si $\varphi \neq \pi$, alors $e^{i\varphi} \neq -1$, donc $\frac{1+iu}{1-iu} = e^{i\varphi} \iff u = \frac{e^{i}\varphi - 1}{i(e^{i\varphi} + 1)} = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ en factorisant par l'angle moitié.

5. Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $\left(\frac{1+iu}{1-iu}\right)^n = 1$. En prenant le module, on obtient $|1 + iu|^n = |1 - iu|^n$, et comme $x \mapsto x^n$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, $|1 + iu| = |1 - iu|$.
   Ainsi, iu est à égale distance de 1 et de -1, donc iu est sur l'axe des imaginaires purs. Autrement dit, $\boxed{u \in \mathbb{R}}$.

6. D'après le théorème sur les racines n-ièmes de l'unité : $\left(\frac{1+iu}{1-iu}\right)^n = 1 \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \mid \frac{1+iu}{1-iu} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. On remarque que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{2k\pi}{n} \in [0, 2\pi[$, et $\frac{2k\pi}{n} = \pi \iff k = \frac{n}{2}$.
   D'après la question 4, on obtient alors les solutions :

   > - si n est impair : $\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, et on a n solutions;
   > - si n est pair : $\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!] \setminus \{n/2\}$, et on a $n-1$ solutions;

7. On remarque que $\frac{1+iu}{1-iu} = 1 \iff u = 0$.
   D'après la question 3b, soit $u \in \mathbb{C}^*$, u est solution de(E') ssi $\frac{1+iu}{1-iu} = -1 = e^{i\pi}$ ou $\left(\frac{1+iu}{1-iu}\right)^n = 1$. La première équation n'a pas de solutions, et la seconde est résolue dans la question précédente. En enlevant la solution $u = 0$, on trouve donc :

   > - si n est impair : $\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, et on a $n-1$ solutions;
   > - si n est pair : $\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!] \setminus \{n/2\}$, et on a $n-2$ solutions.