Devoir Surveillé 04

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.

Exercice 1 (Deux intégrales). On considère les intégrales :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u.$$

1. (a) Justifier que l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$ possède une unique solution réelle. On la notera α dans la suite.
   (b) Exprimer α à l'aide de la fonction ln.
   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.
2. Calculer J en posant $u = \mathrm{sh}(x)$. On exprimera le résultat en fonction de α.
3. A l'aide d'une intégration par parties, obtenir une équation reliant I et J.
4. En déduire une expression de I en fonction de α.

Exercice 2 (Deux intégrales encore).

1. Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Justifier que $\sin(t) = \dfrac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$.
2. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1}\mathrm{d}x$.
3. Calculer $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2-\sin(t)}\mathrm{d}t$ en posant $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

Exercice 3 (Un peu de logique).

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. On considère l'assertion :

$$(A) \quad x + y > M \Rightarrow \max(x, y) > \frac{M}{2}.$$

   (a) Écrire la négation de cette assertion.
   (b) Écrire la contraposée de (A).
   (c) Démontrer la contraposée de (A).
   (d) Que peut-on en déduire sur (A) ?
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer qu'il existe une unique fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une unique fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que g est paire, h est impaire et $f = g + h$.

Exercice 4 (Des systèmes linéaires).
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère le système :

$$(S_{a,b}) : \begin{cases} x + by + az = 1 \\ x + aby + z = b \\ ax + by + z = 1. \end{cases}$$

1. Dans cette question, on prend $a = -2$ et $b = -2$. Résoudre le système $(S_{-2,-2})$ et interpréter le résultat à l'aide d'intersections de plans et droites.
2. On prend maintenant $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles le système est compatible.

Exercice 5 (Une équation différentielle linéaire).
Soit μ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On considère l'équation différentielle :

$$(E_\mu) \quad y'' + y = \mu(t).$$

On désigne par φ la solution sur $\mathbb{R}$ de (E_μ) qui vérifie les relations $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$G(x) = \int_0^x \mu(t)\cos(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad H(x) = \int_0^x \mu(t)\sin(t)\mathrm{d}t.$$

On pose enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sin(x)G(x) - \cos(x)H(x)$.

1. (a) Justifier que G, H et F sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Préciser $F(0)$ et $F'(0)$.
   (b) Montrer que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $F''(x) + F(x)$ en fonction de $\mu(x)$.
   (c) Justifier que $F = \varphi$.
2. (a) Calculer la dérivée de $x \mapsto G(x + 2\pi) - G(x)$ et de $x \mapsto H(x + 2\pi) - H(x)$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $G(x + 2\pi) - G(x)$ en fonction de $G(2\pi)$ et $H(x + 2\pi) - H(x)$ en fonction de $H(2\pi)$.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\varphi(x + 2\pi) - \varphi(x)$ en fonction de $\sin(x)$, $\cos(x)$, $G(2\pi)$ et $H(2\pi)$.
   (d) A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $G(2\pi)$ et $H(2\pi)$, la fonction φ est-elle 2π-périodique ?
   (e) Sans calculer φ, la fonction φ est-elle 2π-périodique lorsque $\mu(t) = \sin(t)$?

Exercice 6 (Des équations différentielles non linéaires).

Préliminaires

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$:
$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x}{1+x^2}.$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln(x)}{x}.$$

Partie I

On appelle équation de Bernoulli une équation différentielle non linéaire du type :

$$y' = a(x)y + b(x)y^p \quad (B)$$

où p est un réel différent de 1, et a et b deux fonctions continues sur un intervalle I.
On va donner une méthode pour en déterminer les solutions strictement positives.
Soit $y : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction dérivable sur I et $z = y^{1-p}$.

3. Justifier que z est dérivable sur I et calculer z' en fonction de y et y'.
4. Démontrer que y est solution de (B) si et seulement si z est solution de l'équation linéaire

$$z' = (1-p)a(x)z + (1-p)b(x) \quad (LB).$$

   On dit que (LB) est l'équation linéaire associée à l'équation de Bernoulli (B).
5. (a) Écrire (LB_1) l'équation linéaire associée à l'équation de Bernoulli :

$$y' = -\frac{2x}{1+x^2}y + \frac{2x}{1+x^2}\sqrt{y} \quad (B_1).$$

   (b) Quelles sont les solutions de l'équation (LB_1) sur $\mathbb{R}$?
   (c) Parmi ces solutions, préciser quelles sont celles qui prennent des valeurs strictement positives sur tout $\mathbb{R}$?
   (d) Donner alors les solutions de (B_1) strictement positives sur $\mathbb{R}$.
6. (a) Écrire l'équation (LB_2) associée à l'équation de Bernoulli :

$$y' = \frac{1}{x}y - \frac{\ln(x)}{x}y^2 \quad (B_2).$$

   (b) Quelles sont les solutions de l'équation (LB_2) sur $\mathbb{R}_+^*$?
   (c) Parmi ces solutions, préciser quelles sont celles qui prennent des valeurs strictement positives sur tout $\mathbb{R}_+^*$?
   (d) Donner alors les solutions de (B_2) strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II

On appelle équation de Ricatti une équation différentielle non linéaire du type :

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2 \quad (R)$$

où a, b et c sont trois fonctions continues sur un intervalle I.

7. Supposons que l'on dispose d'une solution particulière de l'équation (R) et notons la y_0. Prenons y une fonction dérivable sur I et posons $z = y - y_0$.
   Démontrer que y est solution de (R) si et seulement si z est solution d'une équation de Bernoulli de la forme

$$z' = \alpha(x)z + c(x)z^2 \quad (BR)$$

   où la fonction α sera exprimée à l'aide de b, c et y_0.
8. Trouver une solution particulière de l'équation de Ricatti ci-dessous :

$$y' = -x\ln(x) + \left(2\ln(x) + \frac{1}{x}\right)y - \frac{\ln(x)}{x}y^2 \quad (R_3).$$

   Quelle est l'équation de Bernoulli (BR_3) associée ?
   Écrire un ensemble contenant une infinité de solutions dans (R_3).

Correction du Devoir Surveillé 04

Correction de l'exercice 1 :

1. (a) La fonction $x \mapsto \mathrm{sh}(x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{sh}(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$. D'après le TBM, sh réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Donc 1 a un unique antécédent par sh, autrement dit, $\boxed{\text{l'équation } \mathrm{sh}(x) = 1 \text{ a une unique solution réelle}}$.

   (b) $\mathrm{sh}(x) = 1 \iff \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = 1 \iff \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 2 \iff \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 1 = 0$. Or $X^2 - 2X - 1 = 0 \iff X = 1 - \sqrt{2}$ ou $X = 1 + \sqrt{2}$. Comme $1 - \sqrt{2} < 0$, on a $\mathrm{e}^\alpha = 1 + \sqrt{2}$, et $\boxed{\alpha = \ln(1+\sqrt{2})}$.

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = (\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))(\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)) = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x} = 1}$.

2. On a $\mathrm{d}u = \mathrm{ch}(x)\mathrm{d}x$, et comme $u = 1 \iff \mathrm{sh}(x) = 1 \iff x = \alpha$, on obtient :
$$J = \int_0^\alpha \frac{\mathrm{ch}(x)}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(x)}}\mathrm{d}x$$
D'après la question 1c et comme ch est positive,
$$\begin{aligned} J &= \int_0^\alpha \frac{\mathrm{ch}(x)}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(x)}}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\alpha 1\mathrm{d}x \end{aligned}$$
Donc $\boxed{J = \alpha}$.

3. On pose $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ et $g(x) = x$ de sorte que $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et $g'(x) = 1$ et on fait une IPP :
$$\begin{aligned} I &= \left[x\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{2} - I + J \end{aligned}$$
donc $\boxed{I = \dfrac{\sqrt{2}+J}{2}}$.

4. D'après les questions précédentes, $\boxed{I = \dfrac{\sqrt{2}+\alpha}{2}}$.

Correction de l'exercice 2 :

1. Comme $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$ ne s'annule pas, donc
$$\sin(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) = 2\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = 2\frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}} = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$
donc on a bien $\boxed{\sin(t) = \dfrac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}}$.

2. On met sous forme canonique : $x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$, d'où
$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$
Donc $\boxed{I = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}}$.

3. On a $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\mathrm{d}t$, donc $\mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$. D'après la première question :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{1}{2-\frac{2u}{1+u^2}} \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{u^2-u+1}\mathrm{d}u \end{aligned}$$

D'après la question précédente, $\boxed{J = I = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}}$.

Correction de l'exercice 3 :

1. (a) $\boxed{\text{NON } (A) \iff \left(x+y>M \text{ ET } \max(x,y)\leq \frac{M}{2}\right)}$.

   (b) $\boxed{\max(x,y)\leq \frac{M}{2} \Rightarrow x+y\leq M}$.

   (c) Supposons que $\max(x,y)\leq \frac{M}{2}$. Alors $x\leq \frac{M}{2}$ et $y\leq \frac{M}{2}$. Donc $x+y\leq \frac{M}{2}+\frac{M}{2}$.

   Donc $\boxed{\max(x,y)\leq \frac{M}{2} \Rightarrow x+y\leq M}$.

   (d) Comme la contraposée de (A) est vraie, $\boxed{(A) \text{ est vraie}}$.

2. - Analyse : soient $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que g est paire, h est impaire et $f=g+h$. Alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=g(x)+h(x)$ et $f(-x)=g(x)-h(x)$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$.
   - Synthèse : on pose pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$. On a bien $g+h=f$ et on vérifie que g est paire et h impaire.

   Ainsi, il existe une unique fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et une unique fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que g est paire, h est impaire et $f=g+h$.

Correction de l'exercice 4 :

1. On applique le pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+4y+z=-2 \\ -2x-2y+z=1 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+2L_1}}{\iff} \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ 6y+3z=-3 \\ -6y-3z=3 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\iff} \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ 6y+3z=-3 \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1+2z+2y=z \\ y=-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2} \end{cases}$$

   Ainsi, l'ensemble des solutions de $(S_{-2,-2})$ est $\boxed{\left\{\left(z,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z,z\right),z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\left(0,-\frac{1}{2},0\right)+z\left(1,-\frac{1}{2},1\right),z\in\mathbb{R}\right\}}$. Les trois plans se coupent donc le long de la droite passant par $\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$ et dirigée par $\left(1,-\frac{1}{2},1\right)$.

2. Prenons a et b quelconques :

$$\begin{cases} x+by+az=1 \\ x+aby+z=b \\ ax+by+z=1 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-aL_1}}{\iff} \begin{cases} x+by+az=1 \\ (b-ab)y+(1-a)z=b-1 \\ (b-ab)y+(1-a^2)z=1-a \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\iff} \begin{cases} x+by+az=1 \\ (b-ab)y+(1-a)z=b-1 \\ (a-a^2)z=2-a-b \end{cases}$$

   Comme $a-a^2=0 \iff a=0$ ou $a=1$ on a :
   - si $a=0$, et $2-b\neq 0$, le système est incompatible ;
   - si $a=0$ et $2-b=0$, $S_{a,b} \iff \begin{cases} x+2y=1 \\ 2y+z=1 \end{cases}$ qui est compatible ;
   - si $a=1$ et $1-b\neq 0$, le système est incompatible ;
   - si $a=1$ et $1-b=0$, $S_{a,b} \iff x+y+z=1$ qui est compatible ;
   - si $a\neq 0,1$ alors $S_{a,b} \iff \begin{cases} x+by+az=1 \\ b(1-a)y=-\frac{2-a-b}{a}+b-1 \\ z=\frac{2-a-b}{a-a^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x+by+az=1 \\ by=-\frac{2-a-b}{a(1-a)}+\frac{b-1}{1-a} \\ z=\frac{2-a-b}{a-a^2} \end{cases}$, donc si $b=0$, la deuxième équation s'écrit $0=-2$ donc le système est incompatible et si $b\neq 0$, le système est compatible.

   Pour résumer, le système est compatible si : $\boxed{a=0 \text{ et } b=2 \text{ ou bien si } a=1 \text{ et } b=1 \text{ ou bien si } a\neq 0,1 \text{ et } b\neq 0}$.

Correction de l'exercice 5 :

1. (a) Comme $t\mapsto \mu(t)\cos(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le TFA, G est l'unique primitive de cette fonction qui s'annule en 0. En particulier, G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $G'(x)=\mu(x)\cos(x)$.
   De même H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $H'(x)=\mu(x)\sin(x)$. Enfin, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations, et $\forall x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=\cos(x)G(x)+\sin(x)G'(x)+\sin(x)H(x)-\cos(x)H'(x)=\cos(x)G(x)+\sin(x)H(x)$.
   Donc $\boxed{G, H \text{ et } F \text{ sont dérivables sur } \mathbb{R} \text{ et } F(0)=0 \text{ et } F'(0)=0}$.

(b) D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \cos(x)G(x) + \sin(x)H(x)$, donc F' est dérivable par opérations. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F''(x) &= -\sin(x)G(x) + \cos(x)G'(x) + \cos(x)H(x) + \sin(x)H'(x) \\ &= -F(x) + \mu(x)\cos^2(x) + \mu(x)\sin^2(x) \\ &= -F(x) + \mu(x). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F''(x) + F(x) = \mu(x)}$.

(c) D'après la question précédente, F est solution de (E_μ). De plus, $F(0) = \varphi(0) = 0$ et $F'(0) = \varphi'(0) = 0$, donc F et φ ont les mêmes conditions initiales. Ainsi, $\boxed{F = \varphi}$.

2. (a) Soit $g : x \mapsto G(x+2\pi) - G(x)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{g'(x) = G'(x+2\pi) - G'(x) = \mu(x+2\pi)\cos(x+2\pi) - \mu(x)\cos(x) = 0}$ car μ et cos sont 2π-périodiques.

De même la fonction $h : x \mapsto H(x+2\pi) - H(x)$ est dérivable et pour tout $\boxed{x \in \mathbb{R},\ h'(x) = 0}$.

(b) Comme g' est nulle sur $\mathbb{R}$, g est constante sur $\mathbb{R}$, donc $g(x) = g(0)$, ce qui donne $\boxed{G(x+2\pi) - G(x) = G(2\pi) - G(0) = G(2\pi)}$.

De même $\boxed{H(x+2\pi) - H(x) = H(2\pi)}$.

(c) D'après la question 1c,

$$\begin{aligned} \varphi(x+2\pi) - \varphi(x) &= F(x+2\pi) - F(x) \\ &= \sin(x)G(x+2\pi) - \cos(x)H(x+2\pi) - (\sin(x)G(x) - \cos(x)H(x)) \\ &= \sin(x)(G(x+2\pi) - G(x)) - \cos(x)(H(x+2\pi) - H(x)) \end{aligned}$$

et d'après la question précédente, $\boxed{\varphi(x+2\pi) - \varphi(x) = \sin(x)G(2\pi) - \cos(x)H(2\pi)}$.

(d) La fonction φ est 2π-périodique ssi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x)G(2\pi) - \cos(x)H(2\pi) = 0$.
Donc, si φ est 2π-périodique, en particulier, pour $x = 0$, on a $-H(2\pi) = 0$, donc $H(2\pi) = 0$, et pour $x = \frac{\pi}{2}$, $G(2\pi) = 0$.
Réciproquement, si $H(2\pi) = G(2\pi) = 0$, on a bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x)G(2\pi) - \cos(x)H(2\pi) = 0$.
Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est } 2\pi\text{-périodique ssi } G(2\pi) = H(2\pi) = 0}$.

(e) Prenons $\mu : t \mapsto \sin(t)$. Alors $H(2\pi) = \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \pi - \frac{1}{4}[\sin(2t)]_0^{2\pi} = \pi$. Comme $H(2\pi) \neq 0$, $\boxed{\varphi \text{ n'est pas } 2\pi\text{-périodique}}$.

Correction de l'exercice 6 :

1. On a $\int^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$, donc

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = 0 \iff \exists A \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = \frac{A}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On remarque que $y_P : x \mapsto 1$ est solution de l'équation. Donc

$$\boxed{y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x}{1+x^2} \iff \exists A \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \frac{A}{\sqrt{1+x^2}} + 1.}$$

2. On a $\int^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(x) + c$, donc

$$y' + \frac{1}{x}y = 0 \iff \exists A \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = A\mathrm{e}^{-\ln(x)} = \frac{A}{x}.$$

On cherche $y_P : x \mapsto \frac{s(x)}{x}$ solution de l'équation en faisant varier la constante :

$$y_P' + \frac{1}{x}y_P = \frac{\ln(x)}{x} \iff \frac{s'(x)x - s(x)}{x^2} + \frac{s(x)}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x} \iff s'(x) = \ln(x).$$

Or, en intégrant par parties,

$$\int^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t)]^x - \int^x 1\,\mathrm{d}t = x\ln(x) - x + c,$$

donc $y_P : x \mapsto \ln(x) - 1$ est solution de l'équation. Enfin,

$$\boxed{y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln(x)}{x} \iff \exists A \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = \frac{A}{x} + \ln(x) - 1.}$$

3. Comme $x \mapsto x^{1-p} = \mathrm{e}^{(1-p)\ln(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, $\boxed{z \text{ est dérivable sur } I}$.
De plus, $\boxed{\forall x \in I,\ z'(x) = (1-p)y'(x)y^{-p}(x)}$.

4. Comme y est strictement positive sur I :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (B) &\iff \forall x\in I, y'(x)=a(x)y(x)+b(x)y^p(x)\\ &\iff \forall x\in I, y'(x)y^{-p}(x)=a(x)y^{1-p}(x)+b(x)\\ &\iff \forall x\in I, \frac{z'(x)}{1-p}=a(x)z(x)+b(x)\\ &\iff \forall x\in I, z'(x)=(1-p)a(x)z(x)+(1-p)b(x). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{y \text{ est solution de } (B) \text{ ssi } z \text{ est solution de } (LB)}$.

5. (a) On a $p=\frac{1}{2}$, $a(x)=-\frac{2x}{1+x^2}$ et $b(x)=\frac{2x}{1+x^2}$, donc

$$\boxed{z'=-\frac{x}{1+x^2}z+\frac{x}{1+x^2}\quad (LB_1)}$$

(b) D'après la question 1, les solutions de (LB_1) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $\boxed{z:x\mapsto \frac{A}{\sqrt{1+x^2}}+1, \text{ avec } A\in\mathbb{R}}$.

(c) Prenons $A\in\mathbb{R}$ et $z:x\mapsto\frac{A+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$. On veut A tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $A+\sqrt{1+x^2}>0$, c'est-à-dire que $-A$ est un minorant de la fonction $x\mapsto\sqrt{1+x^2}$.
En particulier, pour $x=0$, on obtient $A>-1$. Puis, comme pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt{1+x^2}\geq 1$, si $A>-1$, on a bien $A+\sqrt{1+x^2}>0$.
Donc les solutions à valeurs strictement positives sont celles telles que $\boxed{A>-1}$.

(d) Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ et $z=y^{\frac{1}{2}}$. D'après la question 4,

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (B_1) &\iff z \text{ est solution de} (LB_1)\\ &\iff \exists A>-1 \mid \forall x\in\mathbb{R}, z(x)=\frac{A}{\sqrt{1+x^2}}+1.\\ &\iff \boxed{\exists A>-1\mid\forall x\in\mathbb{R}, y(x)=\left(\frac{A}{\sqrt{1+x^2}}+1\right)^2} \end{aligned}$$

6. (a) On a $p=2$, $a(x)=\frac{1}{x}$ et $b(x)=-\frac{\ln(x)}{x}$, donc

$$\boxed{z'=-\frac{1}{x}z+\frac{\ln(x)}{x}\quad (LB_2)}$$

(b) D'après la question 2, les solutions de (LB_2) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $\boxed{z:x\mapsto\frac{A}{x}+\ln(x)-1, \text{ avec } A\in\mathbb{R}}$.

(c) Soit $A\in\mathbb{R}$ et $z:x\mapsto\frac{A}{x}+\ln(x)-1$. On veut A tel que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\frac{A}{x}>1-\ln(x)$ ou encore $A>x-x\ln(x)$. la fonction $g:x\mapsto x-x\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $g'(x)=-\ln(x)$. Donc g est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$, ce qui donne $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $g(x)\leq g(1)=1$. Ainsi, z est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ ssi $A>1$.
Donc les solutions à valeurs strictement positives sont celles telles que $\boxed{A>1}$.

(d) Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ et $z=y^{-1}$. D'après la question 4,

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (B_2) &\iff z \text{ est solution de } (LB_2)\\ &\iff \exists A>1\mid\forall x\in\mathbb{R}_+^*, z(x)=\frac{A}{x}+\ln(x)-1.\\ &\iff \boxed{\exists A>1\mid\forall x\in\mathbb{R}_+^*, y(x)=\left(\frac{A}{x}+\ln(x)-1\right)^{-1}} \end{aligned}$$

7. Remarquons que z est dérivable sur I par opérations et $\forall x\in I$

$$\begin{aligned} y'(x)-a(x)-b(x)y(x)-c(x)y^2(x) &= z'(x)+y_0'(x)-a(x)-b(x)z(x)-b(x)y_0(x)-c(x)z^2(x)-c(x)y_0^2(x)-2c(x)y_0(x)z(x)\\ &= z'(x)-(b(x)+2c(x)y_0)z(x)-c(x)z^2(x) \end{aligned}$$

car y_0 est solution de (R).
Ainsi, en posant $\boxed{\alpha=b+2cy_0}$ pour tout $x\in I$, $z'(x)-\alpha(x)z(x)+c(x)z^2=y'(x)-a(x)-b(x)y(x)-c(x)y^2(x)$, donc y est solution de (R) ssi z est solution de (BR).

8. On remarque que $\boxed{y_0:x\mapsto x}$ est solution de (R_3).

D'après la question précédente, $\boxed{(BR_3): z'=\frac{1}{x}z-\frac{\ln(x)}{x}z^2}$. Autrement dit, on retrouve (B_2).

D'après la question 6d, $\boxed{\text{pour tout } A>1 \text{ les fonctions } y:x\mapsto x+\left(\frac{A}{x}+\ln(x)-1\right)^{-1} \text{ sont solutions de } (R_3)}$.