Contrôle de cours 9 - Arithmétique / Applications - Sujet A
Mercredi 11 décembre 2024

Question 1 (2 pts)

Énoncer le théorème de la division euclidienne pour deux entiers relatifs a et b.
Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$. ☐

Question 2 (2 pts)

Calculer le PGCD de 195 et 351.
On calcule les divisions euclidiennes successives : $\mathrm{PGCD}(351, 195) = \mathrm{PGCD}(195, 156) = \mathrm{PGCD}(156, 39) = \mathrm{PGCD}(39, 0) = 39$. ☐

Question 3 (5 pts)

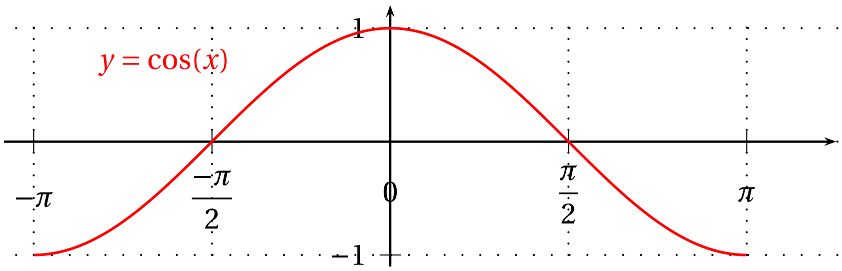
Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$, et $B \subset F$.
Donner les définitions de :

1. $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\}$.
2. $f^{<-1>}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.
3. (avec des quantificateurs) f est injective : $\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.
4. (avec des quantificateurs) f est surjective : $\forall y \in F, \exists x \in E \mid f(x) = y$.
5. (avec des quantificateurs) f est bijective : $\forall y \in F, \exists! x \in E \mid f(x) = y$.
6. Faire un petit dessin pour m'expliquer l'injectivité : ☐

Question 4 (3pts)

Soit $f : \begin{array}{ccc} [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$.

1. Tracer la courbe de f :



2. En justifiant, dire si l'application f est injective, surjective, bijective.
   f n'est pas injective car $\cos(-\pi/2) = \cos(\pi/2)$.
   f n'est pas surjective car 2 n'a pas d'antécédent par cos.
3. Déterminer $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0, 1]$.
4. Déterminer $f^{<-1>}([0, 2]) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. ☐

Contrôle de cours 9 - Arithmétique / Applications - Sujet B
Mercredi 11 décembre 2024

Question 1 (2 pts)

Énoncer le théorème de la division euclidienne pour deux entiers relatifs a et b.
Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$. ☐

Question 2 (2 pts)

Calculer le PGCD de 247 et 285.
On calcule les divisions euclidiennes successives : $\mathrm{PGCD}(285, 247) = \mathrm{PGCD}(247, 38) = \mathrm{PGCD}(38, 19) = \mathrm{PGCD}(19, 0) = 19$. ☐

Question 3 (5 pts)

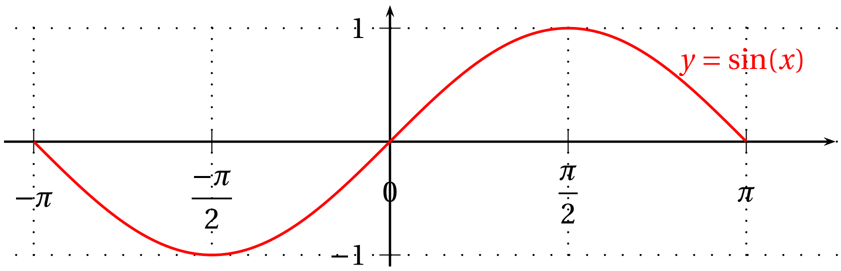
Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$, et $B \subset F$.
Donner les définitions de :

1. $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\}$.
2. $f^{<-1>}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.
3. (avec des quantificateurs) f est injective : $\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.
4. (avec des quantificateurs) f est surjective : $\forall y \in F, \exists x \in E \mid f(x) = y$.
5. (avec des quantificateurs) f est bijective : $\forall y \in F, \exists! x \in E \mid f(x) = y$.
6. Faire un petit dessin pour m'expliquer la surjectivité : ☐

Question 4 (3pts)

Soit $f : \begin{array}{ccc} [-\pi, \pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$.

1. Tracer la courbe de f :



2. En justifiant, dire si l'application f est injective, surjective, bijective.
   f n'est pas injective car $\sin(-\pi) = \sin(0)$.
   f nest pas surjective car 2 n'a pas d'antécédent par sin.
3. Déterminer $f([0, \pi[) = [0, 1]$.
4. Déterminer $f^{<-1>}([-2, 0]) = [-\pi, 0]$. ☐