Devoir Surveillé 05

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.

Exercice 1 (Un inf).
Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. On pose $m = \inf(A)$ et $B = A \cap]-\infty, m+1]$.

1. Justifier que $m+1$ ne minore pas A.
2. En déduire que B est non vide.
3. Montrer que B admet une borne inférieure qui vérifie $\inf(B) \geq \inf(A)$.
4. Justifier que $\inf(B)$ minore A.
5. En déduire que $\inf(A) = \inf(B)$.

Exercice 2 (Des SRLO2).
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = n$$

On cherche à déterminer le terme général de (u_n) en fonction de n.

1. Justifier qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que la suite (v_n) donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = an + b$ vérifie
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} + v_{n+1} + v_n = n$$
On procédera par analyse-synthèse.
2. On considère la suite (v_n) donnée par la question précédente et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$.
Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} + w_{n+1} + w_n = 0$.
3. Déterminer w_0 et w_1, puis l'expression de w_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3 (De l'arithmétique).

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ un entier. On dit que m est un carré parfait s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = k^2$.
Justifier que m est un carré parfait si et seulement si dans sa décomposition en facteurs premiers, toutes les puissances sont paires.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On suppose que $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$.

2. Soit p un nombre premier. Justifier que si p divise a, alors p ne divise pas b.
On pourra raisonner par l'absurde.

On suppose que le produit ab est un carré parfait, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $ab = n^2$.

3. En utilisant les décompositions en facteurs premiers de a et b, justifier que a et b sont des carrés parfaits.
4. On ne suppose plus que $\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$. Le résultat de la réponse précédente est-il encore vrai ?

Exercice 4 (Un peu de tout).

1. Soit $f : E \to F$ une application, et B une partie de F. Donner la définition de $f^{<-1>}(B)$.

On considère l'ensemble :

$$E = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2\right\}$$

et l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (u_n) \in E, \quad f((u_n)) = u_0$$

qui à une suite de E associe son premier terme.

2. Soit (u_n) et (v_n) deux éléments de E. On suppose que $f((u_n)) = f((v_n))$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$.
3. Que peut-on en déduire sur l'application f ?
4. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Combien peut-il y avoir d'éléments dans $f^{<-1>}(\{a\})$?
   (b) Soit u une suite telle que $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.
   Déterminer le terme général de (u_n) en fonction de n.
   (c) En déduire $f^{<-1>}(\{a\})$.
5. Justifier que f est bijective et déterminer son application réciproque.

Exercice 5 (Des ensembles).

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On note $A + B$ l'ensemble :

$$A + B = \{a + b, \text{ avec } (a, b) \in A \times B\}.$$

1. Dans cette question **UNIQUEMENT**, on prend $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 2\}$.
   Déterminer $A + B$.
2. Soient A, B, A' et B' quatre parties de $\mathbb{R}$. Montrer que :
   $$\left(A \subset A' \quad \text{et} \quad B \subset B'\right) \Rightarrow A + B \subset A' + B'.$$
3. Soient A_1, A_2 et B trois parties de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que : $(A_1 \cup A_2) + B = (A_1 + B) \cup (A_2 + B)$.
   (b) Est-ce que : $(A_1 \cap A_2) + B = (A_1 + B) \cap (A_2 + B)$?

Exercice 6 (Des applications).

Soient E, F et G trois ensembles non vides et $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. On définit $h \in \mathscr{F}(E, F \times G)$ par :

$$\forall x \in E, \quad h(x) = (f(x), g(x)).$$

1. Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.
2. On suppose que f et g sont surjectives. Est-ce que h est surjective ? Justifier.

On considère $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = (2t - 1, 3t + 2)$$

et D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $3x - 2y + 7 = 0$.

3. Montrer que $\text{Im}(h) = D$.

Exercice 7 (Une étude de suite).
On considère la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n + 1 + \dfrac{1}{x_n - 1} \end{cases}$$

et on pose $f : x \mapsto x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ et $g : x \mapsto f(x) - x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition puis étudier les variations de f pour dresser son tableau de variations complet.
2. Trouver les points fixes de f, c'est-à-dire les $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tels que $f(x) = x$.
3. Déterminer le signe de la fonction g.
4. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Tracer la courbe représentative de f la droite Δ et la droite d'équation $y = x$ dans le même repère du plan.
6. Représenter les termes successifs de la suite (x_n) sur le graphique précédent en prenant $x_0 = 2$ et $x_0 = -1$. On utilisera deux couleurs différentes.
7. Que valent $f(]-\infty, 0])$, $f(]0, 1[)$ et $f(]1, +\infty[)$?
8. On suppose que $x_0 \in]1, +\infty[$.
   (a) Montrer que la suite (x_n) est bien définie et est à valeurs dans $]1, +\infty[$.
   (b) Justifier que (x_n) est croissante.
   (c) Bonus : montrer que (x_n) diverge vers $+\infty$.
9. On prend de nouveau $x_0 \in]1, +\infty[$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq n + 1$.
   (b) En déduire que : $\forall n \geq 2$, $0 \leq x_n - x_{n-1} - 1 \leq \dfrac{1}{n-1}$.
   (c) Justifier alors que pour tout $n \geq 2$:
   $$0 \leq x_n - x_1 - (n-1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$
   (d) On rappelle que pour tout $t > -1$, $\ln(1+t) \leq t$.
   Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\ln(k-1) - \ln(k) \leq -\dfrac{1}{k}$.
   (e) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n-1)$.
   (f) Montrer alors que pour tout $n \geq 2$, $n + 1 \leq x_n \leq x_1 + n + \ln(n-1)$.
   (g) En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Correction du Devoir Surveillé 05

Correction de l'exercice 1 :

1. Comme $m = \inf(A)$, c'est le plus grand des minorants de A. Donc $\boxed{m+1 \text{ n'est pas un minorant de } A}$.
2. Comme $m+1$ ne minore pas A, il existe $x \in A$ tel que $x < m+1$. Donc $x \in A$ et $x \in]-\infty, m+1]$. Donc $x \in B$ et $\boxed{B \neq \emptyset}$.
3. Soit $x \in B$. Alors $x \in A$, donc $x \geq \inf(A)$. Donc $\inf(A)$ minore B. Comme B est non vide et minoré, $\boxed{B \text{ admet une borne inférieure}}$. De plus, $\inf(B)$ est le plus grand des minorants de B, et $\inf(A)$ est un minorant de B, donc $\boxed{\inf(A) \leq \inf(B)}$.
4. Soit $x \in A$.
   - Premier cas : si $x > m+1$, alors pour tout $b \in B$, $x \geq b \geq \inf(B)$.
   - Deuxième cas : si $x \leq m+1$, alors $x \in B$, donc $x \geq \inf(B)$.

   Dans les deux cas, $x \geq \inf(B)$. Donc $\boxed{\inf(B) \text{ minore } A}$.
5. D'après la question précédente, comme $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A, $\inf(B) \leq \inf(A)$. D'après la question 3, $\boxed{\inf(A) = \inf(B)}$.

Correction de l'exercice 2 :

1.
   - Analyse : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = an + b$. Supposons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} + v_{n+1} + v_n = n$. En particulier, pour $n = 0$, on a $3a + 3b = 0$. Pour $n = 1$, on trouve $6a + 3b = 1$. En soustrayant, on obtient $3a = 1$, donc $a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$.
   - Synthèse : on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{n-1}{3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} + v_{n+1} + v_n = \frac{n+1+n+n-1}{3} = n$.

   Ainsi, $\boxed{\text{le seul couple qui convient est } \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$w_{n+2} + w_{n+1} + w_n = u_{n+2} - v_{n+2} + u_{n+1} - v_{n+1} + u_n - v_n = (u_{n+2} + u_{n+1} + u_n) - (v_{n+2} + v_{n+1} + v_n) = n - n = 0.$$
   Donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} + w_{n+1} + w_n = 0}$.
3. $w_0 = u_0 - v_0 = \frac{4}{3}$ et $w_1 = u_1 - v_1 = 0$.
   L'équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ dont les racines sont $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$.
   Donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = A\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + B\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$.
   Puis,
$$\begin{cases} A = \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{4}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}B = \frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{4}{3} \\ B = \frac{4\sqrt{3}}{9} \end{cases}$$
   Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{4}{3}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{4\sqrt{3}}{9}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}$.
4. D'après les questions précédentes, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = w_n + v_n = \frac{4}{3}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{4\sqrt{3}}{9}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{n-1}{3}}$.

Correction de l'exercice 3 :

1.
   - $\Rightarrow$: supposons que m est un carré parfait. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = k^2$. Notons $k = p_1^{\gamma_1} \cdots p_r^{\gamma_r}$ la décomposition en facteurs premiers de k. Alors $m = \left(p_1^{\gamma_1} \cdots p_r^{\gamma_r}\right)^2 = p_1^{2\gamma_1} \cdots p_r^{2\gamma_r}$: les puissances sont paires.
   - $\Leftarrow$: notons $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en facteurs premiers et supposons que $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont pairs. Il existe $\beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{N}$ tels que $\alpha_1 = 2\beta_1, \dots, \alpha_r = 2\beta_r$. Donc $m = p_1^{2\beta_1} \cdots p_r^{2\beta_r} = \left(p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}\right)^2$ et m est un carré parfait.

   Ainsi, $\boxed{m \text{ est un carré parfait ssi dans sa décomposition en facteurs premiers, toutes les puissances sont paires}}$.

2. Supposons que p divise a. Supposons par l'absurde que p divise b. Alors p divise a et b donc $\mathrm{PGCD}(a,b) \geq p > 1$, ce qui contredrit l'hypothèse de l'énoncé.
   Donc $\boxed{\text{si } p \text{ divise } a,\ p \text{ ne divise pas } b}$.

3. D'après la question précédente, les facteurs premiers de a sont différents de ceux de b. Notons $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ et $b = p_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \cdots p_r^{\alpha_r}$ les décompositions en facteurs premiers de a et b. Alors $ab = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ est la décomposition en facteurs premiers de ab par unicité.
   D'après la première question, toutes les puissances dans cette décomposition sont paires. Il existe donc $\beta_1 \dots, \beta_r \in \mathbb{N}$ tels que $\alpha_1 = 2\beta_1, \dots, \alpha_r = 2\beta_r$.
   Ainsi, toutes les puissances dans les décompositions de a et b sont paires et d'après la première question,
   $\boxed{a \text{ et } b \text{ sont des carrés parfaits}}$.

4. $\boxed{\text{Non}}$, par exemple $a = 6$ et $b = 6$ ne sont pas des carrés parfaits, mais $ab = 36$ est un carré parfait.

Correction de l'exercice 4 :

1. $\boxed{f^{<-1>}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}}$.
2. On procède par récurrence sur n :
   - Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = f((u_n)) = f((v_n)) = v_0$.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = v_n$. Comme $(u_n), (v_n) \in E$, $v_{n+1} = 3v_n + 2 = 3u_n + 2 = u_{n+1}$.

   D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n}$.
3. $\boxed{\text{L'application } f \text{ est injective}}$.
4. (a) Comme f est injective, $\boxed{f^{<-1>}(\{a\}) \text{ a 0 ou 1 élément}}$.
   (b) On cherche d'abord $c \in \mathbb{R}$ tel que $c = 3c + 2$. On trouve $c = -1$. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - c = 3u_n + 2 - (3c + 2) = 3(u_n - c)$. Donc $(u_n - c)$ est géométrique de raison 3. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - c = (u_0 - c)3^n$. D'où, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (a+1)3^n - 1}$.
   (c) D'après les deux questions précédentes, $\boxed{f^{<-1>}(\{a\}) = \{((a+1)3^n - 1)\}}$.
5. Comme tout les éléments de $\mathbb{R}$ admettent un unique antécédent par f, $\boxed{f \text{ est bijective}}$.
   De plus, $f^{-1} : \mathbb{R} \to E$ est donnée par : $\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ f^{-1}(a) = ((a+1)3^n - 1)}$.

Correction de l'exercice 5 :

1. $\boxed{A + B = \{2,3,4,5\}}$, on ne répète pas des éléments dans un ensemble.
2. Supposons que $A \subset A'$ et $B \subset B'$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $x \in A + B$. Il existe $(a,b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$. Comme $A \subset A'$ et $B \subset B'$, on a $a \in A'$ et $b \in B'$. Donc $x = a + b \in A' + B'$.
   Ainsi, $\boxed{(A \subset A' \text{ et } B \subset B') \Rightarrow A + B \subset A' + B'}$.
3. (a)
   - $\subset$: soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $x \in (A_1 \cup A_2) + B$. Il existe $a \in A_1 \cup A_2$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$. Si $a_1 \in A_1$, alors $x \in A_1 + B$ et si $x \in A_2$, alors $x \in A_2 + B$. Dans les deux cas, $x \in (A_1 + B) \cup (A_2 + B)$.
     Donc $(A_1 \cup A_2) + B \subset (A_1 + B) \cup (A_2 + B)$.
   - $\supset$: soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $x \in (A_1 + B) \cup (A_2 + B)$.
     Si $x \in A_1 + B$, alors il existe $a \in A_1$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$. Puis, $a \in A_1 \cup A_2$, donc $x \in (A_1 \cup A_2) + B$.
     Si $x \in A_2 + B$, on a de même $x \in (A_1 \cup A_2) + B$.
     Dans les deux cas, $x \in (A_1 \cup A_2) + B$. Donc $(A_1 + B) \cup (A_2 + B) \subset (A_1 \cup A_2) + B$.

   Ainsi, $\boxed{(A_1 + B) \cup (A_2 + B) = (A_1 \cup A_2) + B}$.

   (b) $\boxed{\text{Non}}$, par exemple $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,3\}$ et $B = \{-1,0,1\}$, on a $(A_1 \cap A_2) \cap B = \{0,1,2\}$, $(A_1 + B) \cap (A_2 + B) = \{0,1,2,3\} \cap \{0,1,2,3,4\} = \{0,1,2,3\}$.

Correction de l'exercice 6 :

1. Supposons que f est injective. Prenons $x, x' \in E$ et supposons que $h(x) = h(x')$. Alors $f(x) = f(x')$ donc $x = x'$ car f est injective. Donc h est injective.
   De même, si g est injective, alors h est injective.
   Ainsi, $\boxed{\text{si } f \text{ ou } g \text{ est injective, alors } h \text{ est injective}}$.
2. $\boxed{\text{Non}}$, par exemple en prenant $E = F = G = \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x$, alors f et g sont surjectives (car bijectives), mais $h : x \mapsto (x,x)$ n'est pas surjective car $(2,1)$ n'a pas d'antécédent par h.

3.
   - $\subset$: soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Supposons que $(x,y)\in\mathrm{Im}(h)$. Il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $(x,y)=(2t-1,3t+2)$, donc $3x-2y+7=6t-3-6t-4+7=0$, et $(x,y)\in D$.
   - $\supset$: soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Supposons que $(x,y)\in D$. Prenons $t=\dfrac{x+1}{2}\in\mathbb{R}$. On a $2t-1=x$ et $3t+2=\dfrac{3x+3}{2}+2=\dfrac{3x+7}{2}=\dfrac{2y}{2}=y$. Donc $(x,y)=h(t)$, et $(x,y)\in\mathrm{Im}(h)$.

   Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(h)=D}$.

Correction de l'exercice 7 :

1. f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et dérivable sur ce même ensemble. Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.
   On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

2. On résout $f(x)=x\iff 1+\dfrac{1}{x-1}=0\iff\dfrac{x}{x-1}=0\iff x=0$. $\boxed{\text{Le seul point fixe de } f \text{ est } 0}$.
3. On a pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$ donc

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

4. On a $f(x)-x=1+\dfrac{1}{x-1}\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$, donc la droite $\boxed{\Delta \text{ est asymptote oblique à la courbe représentative de } f \text{ en } \pm\infty}$.
   De plus, les positions relatives de la droite et de la courbe sont données par le signe de g.
5. Géogebra is your friend.
6. Idem.
7. Comme f est continue et croissante sur $]-\infty,0[$ et $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$ et $f(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0$, on a $\boxed{f(]-\infty,0[)=]-\infty,0[}$.
   De même, $\boxed{f(]0,1[)=]-\infty,0[\text{ et } f(]1,+\infty[)=]4,+\infty[}$.
8. (a) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, H_n : « x_n est bien défini et $x_n\in]1,+\infty[$ ». On montre H_n par récurrence.
   - Initialisation : pour $n=0$, $x_0\in]1,+\infty[$ par hypothèse.
   - Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que x_n est bien défini et $x_n\in]1,+\infty[$. Alors $f(x_n)=x_{n+1}$ est bien défini. Comme $f(]1,+\infty[)=]4,+\infty[$, on a $x_{n+1}\in]4,+\infty[$ et donc $x_{n+1}\in]1,+\infty[$.

   D'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ x_n \text{ est bien défini et } x_n\in]1,+\infty[}$.

   (b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}-x_n=g(x_n)\geq 0$ car $x_n\in]1,+\infty[$. Donc $\boxed{(x_n) \text{ est croissante}}$.

   (c) Comme (x_n) est croissante, soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$. Supposons par l'absurde que (x_n) converge vers $\ell\in\mathbb{R}$. Alors $x_{n+1}\to\ell$, et $f(x_n)\to\ell+1+\dfrac{1}{\ell-1}$. Par unicité de la limite, $\ell=f(\ell)$, donc ℓ est un point fixe de ℓ. D'après les questions précédentes, $\ell=0$. Mais $x_0\in]1,+\infty[$ et (x_n) est croissante, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n\geq x_0>1$. Par passage à la limite, $\ell\geq 1$, ce qui est absurde.
   Donc $\boxed{x_n\to+\infty}$.
9. (a) On procède par récurrence.
   - Initialisation : pour $n=0$, $x_0\geq 1=0+1$.
   - Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $x_n\geq n+1$. Comme $x_n>1$, $x_n-1>0$, donc $\dfrac{1}{x_n-1}>0$. Ainsi, $x_{n+1}\geq x_n+1\geq n+1+1=n+2$.

D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geq n+1}$.

(b) Soit $n \geq 2$, $x_n - x_{n-1} - 1 = \dfrac{1}{x_{n-1}-1}$.

Or, $\dfrac{1}{x_{n-1}-1} \geq 0$, et comme $x_{n-1} \geq n$ (question précédente), $x_{n-1} - 1 \geq n-1 > 0$ et $\dfrac{1}{x_{n-1}-1} \leq \dfrac{1}{n-1}$.

Donc $\boxed{\forall n \geq 2,\ 0 \leq x_n - x_{n-1} - 1 \leq \dfrac{1}{n-1}}$.

(c) Soit $n \geq 2$. D'après la question précédente, pour tout $k \geq 2$, $0 \leq x_k - x_{k-1} - 1 \leq \dfrac{1}{k-1}$ et on somme pour k allant de 2 à n :

$$0 \leq \sum_{k=2}^{n} (x_k - x_{k-1} - 1) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1}.$$

Or

$$\sum_{k=2}^{n} (x_k - x_{k-1} - 1) = \sum_{k=2}^{n} x_k - \sum_{k=2}^{n} x_{k-1} - (n-1) = \sum_{k=2}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k - (n-1) = x_n - x_1 - (n-1)$$

et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

Donc $\boxed{\forall n \geq 2,\ 0 \leq x_n - x_1 - (n-1) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}$.

(d) Soit $k \geq 2$, $\ln(k-1) - \ln(k) = \ln\left(\dfrac{k-1}{k}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$. Comme $-\dfrac{1}{k} > -1$, on peut appliquer l'inégalité donnée et on trouve $\boxed{\ln(k-1) - \ln(k) \leq -\dfrac{1}{k}}$.

(e) Soit $n \geq 2$. On somme l'inégalité précédente entre 2 et $n-1$:

$$\sum_{k=2}^{n-1} \ln(k-1) - \ln(k) \leq -\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}$$

et on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \ln(k-1) - \ln(k) = \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k-1) - \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n-2} \ln(k) - \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) = \ln(1) - \ln(n-1)$. donc

$$-\ln(n-1) \leq -\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}$$

puis

$$\ln(n-1) \geq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}$$

et en ajoutant 1 des deux côtés, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n-1)}$.

(f) Soit $n \geq 2$. D'après la question 9a, $n + 1 \leq x_n$.

D'après la question 9c et la question précédente, $x_n \leq x_1 + n - 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq x_1 + n + \ln(n-1)$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \geq 2,\ n+1 \leq x_n \leq x_1 + n + \ln(n-1)}$.

(g) D'après la question précédente, pour tout $n \geq 2$, $1 + \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{x_n}{n} \leq \dfrac{x_1}{n} + 1 + \dfrac{\ln(n-1)}{n}$. Or $\dfrac{\ln(n-1)}{n} \to 0$ par croissances comparées, donc $\boxed{\dfrac{x_n}{n} \to 1}$ par encadrement.