Contrôle de cours 10 - Suites numériques - Sujet A
Mercredi 8 janvier 2025

Question 1 (0,5 pt)

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Donner avec des quantificateurs la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Question 2 (0,5 pt)

Donner avec des quantificateurs la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq A.$$

Question 3 (2 pts)

Calculer les limites suivantes en justifiant proprement :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n - 1}{5^n - 1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{5^n\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)}$.
   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{5^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n}{5^n} = 0$ car $3 > 1$ et $5 > 1$ et $5 > 3$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n - 1}{5^n - 1} = 0$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(\mathrm{e}^n)}{n^2}$
   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(\mathrm{e}^n) \leq 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{-1}{n^2} \leq \dfrac{\sin(\mathrm{e}^n)}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(\mathrm{e}^n)}{n^2} = 0$. ☐

Question 4 (2 pts)

Soit $u_n = (-1)^n n$. Montrer que (u_n) n'a pas de limite.
On a :

$$u_{2n} = 2n, \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty$$
$$u_{2n+1} = -(2n+1), \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -\infty$$

La suite (u_n) n'a pas de limite car elle a deux suites extraites $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ qui ont des limites différentes. ☐

Question 5 (1 pt)

Compléter l'énoncer du théorème de convergence monotone :
Soit (u_n) une suite réelle croissante :
Si (u_n) est majorée, alors elle converge. Sinon, elle diverge vers $+\infty$. ☐

Question 6 (1 pt)

Compléter l'énoncer du théorème d'encadrement :
Soit $(u_n), (m_n)$ deux suites réelles. Si APDCR, $u_n \geq m_n$, et si $m_n \to +\infty$, alors $u_n \to +\infty$. ☐

Question 7 (2 pts)

1. Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes si : (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante et $u_n - v_n \to 0$, ou bien si (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante et $u_n - v_n \to 0$.
2. Énoncer le théorème sur les suites adjacentes : si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et, dans le cas où (u_n) est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq v_n$. ☐

Contrôle de cours 10 - Suites numériques - Sujet B
Mercredi 8 janvier 2025

Question 1 (0,5 pt)

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Donner avec des quantificateurs la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

☐

Question 2 (0,5 pt)

Donner avec des quantificateurs la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq A.$$

☐

Question 3 (2 pts)

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-1}{3n^2+n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cancel{n^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}$.

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-1}{3n^2+n-1} = \dfrac{1}{3}$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n^2)}{n}$

   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(n^2) \leq 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{-1}{n} \leq \dfrac{\cos(n^2)}{n} \leq \dfrac{1}{n}$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n^2)}{n} = 0$. ☐

Question 4 (2 pts)

Soit $u_n = (-1)^n 5^n$. Montrer que (u_n) n'a pas de limite.
On a

$$u_{2n} = 5^{2n}, \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty$$
$$u_{2n+1} = -5^{2n+1}, \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -\infty$$

La suite (u_n) n'a pas de limite car elle a deux suites extraites $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ qui ont des limites différentes. ☐

Question 5 (1 pt)

Compléter l'énoncer du théorème de convergence monotone :
Soit (u_n) une suite réelle décroissante :
si (u_n) est minorée, alors elle converge. Sinon, elle diverge vers $-\infty$. ☐

Question 6 (1 pt)

Compléter l'énoncer du théorème d'encadrement :
Soit $(u_n), (M_n)$ deux suites réelles. Si APDCR, $u_n \leq M_n$, et si $M_n \to -\infty$, alors $u_n \to -\infty$. ☐

Question 7 (2 pts)

1. Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes si : (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante et $u_n - v_n \to 0$, ou bien si (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante et $u_n - v_n \to 0$.
2. Énoncer le théorème sur les suites adjacentes : si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et, dans le cas où (u_n) est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq v_n$. $\square$