

Contrôle de cours 11 - Suites numériques / Matrices - Sujet A

Mercredi 15 janvier 2025

Question 1 (2 pts)

Soit $q, r, \alpha \in \mathbb{R}$. Comparer avec des o :

- si $|q| < 1$, q^n et n^α : $q^n = o(n^\alpha)$
- si $|q| > 1$, q^n et n^α : $n^\alpha = o(q^n)$
- si $|q| < |r|$, q^n et r^n : $q^n = o(r^n)$
- q^n et $n!$: $q^n = o(n!)$
- $n!$ et n^n : $n! = o(n^n)$

□

Question 2 (2 pts)

Déterminer un équivalent simple des suites ci-dessous :

1. $u_n = \frac{3^n - n^{10} + 1}{\ln(n) - \sqrt{n}}$

Comme $n^{10} = o(3^n)$ et $1 = o(3^n)$, $3^n - n^{10} + 1 \sim 3^n$

Comme $\ln(n) = o(\sqrt{n})$, $\ln(n) - \sqrt{n} \sim -\sqrt{n}$.

Donc $u_n \sim \frac{3^n}{-\sqrt{n}}$.

2. $v_n = \frac{n - \sqrt{n^4 + 1}}{\ln(n) - 2n^2}$

Comme $n^4 + 1 \sim n^4$, $\sqrt{n^4 + 1} \sim n^2$, et $n = o(n^2)$, donc $n - \sqrt{n^4 + 1} \sim -n^2$.

Comme $\ln(n) = o(n^2)$, $\ln(n) - 2n^2 \sim -2n^2$.

Ainsi, $v_n \sim \frac{-n^2}{-2n^2} = \frac{1}{2}$.

□

Question 3 (1 pt)

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$.

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

Question 4 (1 pt)

Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors pour $p \in \mathbb{N}$,

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

□

Question 5 (3 pts)

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

1. Compléter : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.
2. Peut-on calculer AB ? Si oui, faire le calcul ci-dessous.

Oui. On obtient $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Peut-on calculer BA ? Si oui, faire le calcul ci-dessous.

Non car B a 2 colonnes et A a 3 lignes.

□

Question 6 (3 pts)

VRAI OU FAUX (sans justifier)

- | | | |
|---|--------|---------------|
| 1. Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim z_n$ alors $u_n w_n \sim v_n z_n$ | ■ VRAI | □ FAUX |
| 2. Si $u_n \sim v_n$ et $u_n \rightarrow 0$, alors $v_n \sim 0$. | □ VRAI | ■ FAUX |
| 3. Si $u_n - v_n \rightarrow 0$ alors $u_n \sim v_n$. | □ VRAI | ■ FAUX |
| 4. Si (u_n) n'est pas majorée, alors $u_n \rightarrow +\infty$. | □ VRAI | ■ FAUX |
| 5. Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = O(v_n)$. | ■ VRAI | □ FAUX |
| 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $X, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AX = B$. Alors $X = \frac{B}{A}$. | □ VRAI | ■ FAUX □ |

Contrôle de cours 10 - Suites numériques / Matrices - Sujet B

Mercredi 15 janvier 2025

Question 1 (2 pts)

Soit $q, r, \alpha \in \mathbb{R}$. Comparer avec des o :

- si $|q| < 1$, q^n et n^α : $q^n = o(n^\alpha)$
- si $|q| > 1$, q^n et n^α : $n^\alpha = o(q^n)$
- si $|q| < |r|$, q^n et r^n : $q^n = o(r^n)$
- q^n et $n!$: $q^n = o(n!)$
- $n!$ et n^n : $n! = o(n^n)$

□

Question 2 (2 pts)

Déterminer un équivalent simple des suites ci-dessous :

1. $u_n = \frac{n - \ln(n) + \frac{4}{n}}{e^n - n^2}$

Comme $\ln(n) = o(n)$ et $\frac{4}{n} = o(n)$, $n - \ln(n) + \frac{4}{n} \sim n$

Comme $n^2 = o(e^n)$, $e^n - n^2 \sim e^n$.

Donc $u_n \sim \frac{n}{e^n}$.

2. $v_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2 + 1}}{\ln(n) - 2n^2}$

Comme $n^2 + 1 \sim n^2$, $\sqrt{n^2 + 1} \sim n$, donc $\sqrt{n^2 + 1} = o(n^3)$ et $n^3 - \sqrt{n^2 + 1} \sim n^3$.

Comme $\ln(n) = o(n^2)$, $\ln(n) - 2n^2 \sim -2n^2$.

Ainsi, $v_n \sim \frac{n^3}{-2n^2} = -\frac{n}{2}$.

□

Question 3 (1 pt)

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$.

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

Question 4 (1 pt)

Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors pour $p \in \mathbb{N}$,

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

□

Question 5 (3 pts)

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Compléter : $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Peut-on calculer AB ? Si oui, faire le calcul ci-dessous.
Non car A a 2 colonnes et B a 3 lignes.
3. Peut-on calculer BA ? Si oui, faire le calcul ci-dessous.

Oui. On obtient $BA = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

□

Question 6 (3 pts)

VRAI OU FAUX (sans justifier)

- | | | |
|---|-------------------------------|--|
| 1. Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim z_n$ alors $u_n + w_n \sim v_n + z_n$ | ☐ VRAI | ☒ FAUX |
| 2. Si $u_n - v_n \rightarrow 0$ alors $\lim u_n = \lim v_n$. | ☐ VRAI | ☒ FAUX |
| 3. Si (u_n) est bornée, alors (u_n) converge. | ☐ VRAI | ☒ FAUX |
| 4. Si (u_n) n'est pas minorée, alors $u_n \rightarrow -\infty$. | ☐ VRAI | ☒ FAUX |
| 5. Si $u_n = O(v_n)$, alors $u_n = o(v_n)$. | ☐ VRAI | ☒ FAUX |
| 6. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $AB = 0_n$, alors $A = 0_n$ ou $B = 0_n$. | ☐ VRAI | ☒ FAUX |