

**Colles 14 - 13/01/2025 au 17/01/2025****Thèmes traités en classe**

- Chapitre 14 : Suites numériques.
  - ▷ Variations, bornétude, opérations.
  - ▷ Exemples : suites arithmético-géométriques, suites d'ordre 2.
  - ▷ Étude de suites du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
  - ▷ Limite d'une suite, unicité de la limite, toute suite convergente est bornée.
  - ▷ Opérations sur les limites.
  - ▷ Suites extraites et limites.
  - ▷ Limites et inégalités.
  - ▷ Théorème d'encadrement.
  - ▷ Théorème de la limite monotone.
  - ▷ Théorème des suites adjacentes.

**Exercices traités en classe :** I.1, I.2 I.3, I.4, I.5, I.8, I.9, I.10, I.13, II.3, II.4, II.5, II.6, II.7, II.8, II.9, II.10, II.15.

**Questions de cours**

- Une suite réelle  $(u_n)$  est bornée ssi la suite  $(|u_n|)$  est majorée.
- La somme et le produit de deux suites bornées sont bornés.
- C14 Exercice I.3 : Montrer que la somme de deux suites stationnaires est stationnaire. Que dire de la somme de deux suites croissantes ?
- Toute suite convergente est bornée : énoncé et démonstration.
- Soit  $(u_n)$  une suite réelle qui tend vers  $\ell > 0$ . Alors  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang. Démonstration lorsque  $\ell \in \mathbb{R}$ .
- Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  tendent vers la même limite  $\ell$ , alors  $(u_n)$  tend aussi vers  $\ell$ . Démonstration lorsque  $\ell \in \mathbb{R}$ .
- Énoncer le théorème d'encadrement. Démontrer le cas où la suite est majorée par une suite qui tend vers  $-\infty$ .
- Énoncer et démontrer le théorème de la limite monotone dans le cas croissant.
- C14 Exercice II.10 : Montrer que la suite  $(H_n)$  définie par  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  vérifie  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ . En déduire que  $H_n \rightarrow +\infty$ .
- C14 Exercice II.15 : On définit la suite  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par son terme général  $L_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ . Montrer que les suites  $(L_{2n})$  et  $(L_{2n+1})$  sont adjacentes, puis en déduire la nature de la suite  $(L_n)$ .
- Sur demande, pour les plus motivés : C14 Exercice II.5 : soit  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $\ell \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \rightarrow \ell$ .

**A savoir faire**

1. Étudier la monotonie d'une suite.
2. Savoir déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique et d'une suite récurrente d'ordre 2.
3. Savoir utiliser l'étude des fonctions  $f$  et  $x \mapsto f(x) - x$  pour étudier la monotonie de  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
4. Connaître les définitions de  $u_n \rightarrow \ell$  et  $u_n \rightarrow \pm\infty$ .
5. Savoir appliquer proprement les théorèmes d'encadrement et de la limite monotone.
6. Savoir encadrer une somme en utilisant le plus petit terme et le plus grand terme.
7. Savoir montrer que deux suites sont adjacentes.