Continuité - Exercices

I. Limites

Exercice I.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer en utilisant les quantificateurs que :

1. $\lim\limits_{x \to x^+} \sqrt{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$.

Exercice I.2. Étudier la limite en a de la fonction f pour :

1. $a = 1$ et $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
2. $a \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^n - a^n}{x^p - a^p}$ $(p, n \in \mathbb{N}^*)$
3. $a = 0$ et $f(x) = x^2 + \dfrac{\sqrt{x}}{x}$
4. $a = +\infty$ et $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$
5. $a = -\infty$ et $f(x) = 3 + \sqrt{x^2 - 5x} - \sqrt{x^2 - 1}$
6. $a = 0$ et $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin(3x)}$
7. $a = +\infty$ et $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$
8. $a = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$
9. $a \geq 0$ et $f(x) = \dfrac{x - a}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$
10. $a = 1$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$
11. $a = +\infty$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$
12. $a = 0$ et $f(x) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}{x^2 + 1}$
13. $a = 1$ et $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$
14. $a = +\infty$ et $f(x) = x \cos x$
15. $a = \pm\infty$ et $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + \mathrm{e}^x)}{2 + x}$
16. $a = 0^+$ et $f(x) = x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$
17. $a = +\infty$ et $f(x) = x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$

Exercice I.3. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et g est bornée dans un voisinage de a, alors fg tend vers 0 en a.

II. Comparaison de fonctions

Exercice II.1.

1. Montrer que $\mathrm{e}^{\sqrt{x}} \underset{x \to +\infty}{=} o(\mathrm{e}^x)$.
2. On considère deux fonctions réelles f et g telles que $f \underset{+\infty}{\sim} g$. A-t-on $\mathrm{e}^f \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^g$?

Exercice II.2.

1. Montrer que $\sin(\arccos x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1 - x}$.
2. Déterminer un équivalent simple de $\arccos x$ en 1.
3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin \dfrac{x}{x + 1}$.
   Déterminer l'ensemble de définition de f, sa limite en $+\infty$ et un équivalent de f en $+\infty$.
   On rappelle (!) la formule bien connue (!) : $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice II.3. En utilisant des équivalents, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 1}{2x^2 + 1}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 + 2x}{x^5 - x^2 + x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x(2 - x)\tan(2x)}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \mathrm{e}^x)\sin x}{x^2 + x^3}$
5. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x \tan(2x)$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$
7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + 3x)}{x}$
8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x}$
9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{5x} - \mathrm{e}^{3x}}{x}$
10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{\sin x} - 1}$
11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x - 2^x}{x}$
12. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$
13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x}$
14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x + x^2}$
15. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x\sqrt{x + 3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$
16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$
17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \mathrm{e}^x)(1 - \cos x)}{x^3 + x^4}$
18. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin((n + 1)x)}{\sin x}$, $n \in \mathbb{N}$

Exercice II.4. 1. Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes lorsque $x \to +\infty$:

(a) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$
(b) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$

2. Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes lorsque $x \to 0$:

(a) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}$
(b) $\tan(x)-\sin(x)$
(c) e^x+x-1
(d) $\ln(1+\sin(x))$
(e) $(\ln(1+x))^2-(\ln(1-x))^2$

III. Continuité

Exercice III.1. Étudier la continuité des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{|1+x|}-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^2\,\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-2x}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
4. $f : x \mapsto x\sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice III.2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x+4}-2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice III.3. Déterminer l'ensemble de définition et de continuité des fonctions suivantes, puis les éventuels prolongements par continuité :

1. $f : x \mapsto x^{x+1}$
2. $g : x \mapsto \dfrac{x\ln x}{x-1}$
3. $h : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}$
4. $j : x \mapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$

Exercice III.4. 1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution.

2. Montrer que tout polynôme de degré impair de $\mathbb{R}[X]$ a au moins une racine réelle.
3. Montrer que l'équation $x^3+5x-1 = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer ensuite que $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.
4. Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation $8x^7-7x-1 = 0$.

Exercice III.5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}+nx$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_n et dresser son tableau de variations.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution $u_n \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} < u_n < 0$. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice III.6. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \ln(x)+nx$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, f_n s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$ en un seul réel noté x_n.
2. (a) Pour $n \geq 1$, déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
   (b) En déduire la monotonie de la suite (x_n).
   (c) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.
3. Pour tout $n \geq 2$, on pose $y_n = nx_n$.
   (a) Étudier la limite de (y_n).
   (b) Montrer que $\lim \dfrac{\ln(y_n)}{y_n} = 0$.
   (c) Montrer que pour $n \geq 1$, $y_n+\ln(y_n) = \ln(n)$.
   (d) En déduire un équivalent de y_n, puis de x_n.

Exercice III.7 (Banque CCP-MP). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. (a) Démontrer que (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de x_0, le sens de variation de (u_n).

   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\arctan(x))$.

Exercice III.8. Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est k-lipschitzienne si : $\forall (x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. On suppose que f est k-lipschitzienne.

1. Montrer que f est continue sur I.
2. On suppose maintenant que $I = [a, b]$ et $f : I \to I$ et que $k \in]0, 1[$.
   (a) Montrer que f admet un unique point fixe ℓ sur I.
   (b) On définit la suite (u_n) par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

Exercice III.9. 1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ a une unique solution dans $[0, 1]$ qu'on note x_n.

2. Montrer que la suite (x_n) est décroissante.
3. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.
4. Déterminer un équivalent de (x_n).

Exercice III.10. 1. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

2. Une voiture parcourt 90km en une heure. On admet que la distance $d(t)$ parcourue par la voiture en fonction du temps t est une fonction continue sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 30min durant lequel la voiture a parcouru exactement 45km.
   On pourra considérer la fonction $f(t) = d\left(t + \dfrac{1}{2}\right) - d(t)$.
3. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x \in [0, 1 - 1/n]$, $f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = f(x)$.

Exercice III.11. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, qui ne s'annulent pas et qui vérifient : $\forall x \in I, f^2(x) = g^2(x)$.
Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice III.12. 1. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ telle que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > 0$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq m$.

2. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ telles que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq g(x) + m$.

Exercice III.13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice III.14. 1. Montrer qu'une fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

2. Donner un contre-exemple si la fonction est seulement périodique, ou seulement continue.

Exercice III.15. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui admet des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice III.16. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global.

Exercice III.17. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$.
Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice III.18. On cherche les applications $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continues et telles que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et pour tout $x \in [0, 1], f \circ f(x) = x$.

1. Montrer qu'une telle application est injective. En déduire que f est strictement croissante.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que pour tout $x \in [0, 1], f(x) = x$.

Exercice III.19. On souhaite montrer qu'il n'existe pas de fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'image de tout rationnel soit irrationnelle et que l'image de tout irrationnel soit rationnelle.
On raisonne pour cela par l'absurde et on suppose qu'il existe une telle fonction f.
En considérant la fonction $g(x) = f(x) + x$, aboutir à une contradiction.

Exercice III.20. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f, g \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que :

$$\forall x \in [a, b], \exists x' \in [a, b], f(x) = g(x').$$

On veut montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.
On raisonne par l'absurde et on suppose que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \neq g(x)$.

1. Montrer que la fonction $f - g$ est de signe constant et ne s'annule pas sur $[a, b]$.
2. On suppose que $f - g > 0$.
   (a) Montrer que f et g possède chacune un maximum sur $[a, b]$ notés respectivement M_f et M_g.
   (b) Montrer que $M_g \geq M_f$ puis conclure.
3. Traiter le cas $f - g < 0$.

Exercice III.21. 1. On cherche à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

On procède par analyse-synthèse.

(a) Analyse : prenons f qui convient.
   i. Montrer que f est impaire.
   ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
   iii. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$.
   iv. En déduire que f est une fonction linéaire.

(b) Synthèse : à vous de jouer.

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x)f(y)$.

Exercice III.22. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x + 1 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que f est bijective et discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice III.23. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. On suppose que I n'est pas réduit à un point.

1. Soit $a < b$ deux éléments de I. On suppose que $f(a) < f(b)$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in]a, b[$, $f(a) < f(x) < f(b)$.
   (b) En déduire que f est strictement croissante sur $[a, b]$.
   (c) Que peut-on dire de f si $f(a) > f(b)$?
2. Soit $a < b$ deux éléments de I. On suppose que $f(a) < f(b)$ et soit $x < y$ deux autres éléments de I. On pose $c = \min(a, x)$ et $d = \max(b, y)$.
   (a) Justifier que $c \leq a < b \leq d$ et en déduire que f est strictement croissante sur $[c, d]$.
   (b) En déduire que $f(x) < f(y)$.
3. Montrer que f est strictement monotone sur I.

Exercice III.24. 1. Démontrer le théorème de la limite monotone.

2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone. On suppose que $f(I)$ est un intervalle.
   Montrer que f est continue.