# Contrôle de cours 12 - Matrices - Sujet A
# Mercredi 22 janvier 2025

**Question 1 (1 pt)**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire $A$ comme une combinaison linéaire de matrices élémentaires.

$A = 3E_{1,1} - E_{2,1} + 2E_{2,2}$. ☐

**Question 2 (1 pt)**

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$.

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

**Question 3 (1 pt)**

Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors pour $p \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

☐

**Question 4 (1 pt)**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. $A$ est symétrique si : $A^\top = A$
2. $A$ est antisymétrique si : $A^\top = -A$ ☐

**Question 5 (2 pts)**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Le déterminant de $A$ est : $\det(A) = ad - bc$
2. La matrice $A$ est inversible si et seulement si : $\det(A) \neq 0$
3. Si $A$ est inversible, son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

**Question 6 (1 pt)**

Soit $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall i \in [\![1, n]\!], d_i \neq 0.$
2. Si $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $D^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \dots, \frac{1}{d_n}\right)$. ☐

**Question 7 (4 pts)**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(A)$. La matrice $A$ est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.
On fait $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ pour faire apparaître un 0 en plus puis on développe :
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
La matrice $A$ n'est pas inversible.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(B)$. La matrice $B$ est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.
On fait $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$ et on développe par rapport à la première ligne (ou colonne) :
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$
Donc $B$ est inversible.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
Ainsi $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. □

**Question 8 (3 pts)**

VRAI OU FAUX (sans justifier).
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si $AB = 0_n$ alors $A = 0_n$ ou $B = 0_n$. ☐ VRAI ■ FAUX
2. Si $A$ et $B$ sont triangulaires supérieures, alors $\forall (i,j)$, $[AB]_{ij} = [A]_{ij}[B]_{ij}$. ☐ VRAI ■ FAUX
3. $(AB)^\top = A^\top B^\top$. ☐ VRAI ■ FAUX
4. Si $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■ VRAI ☐ FAUX
5. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ☐ VRAI ■ FAUX
6. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire. ■ VRAI ☐ FAUX

. □

# Contrôle de cours 12 - Matrices - Sujet B
## Mercredi 22 janvier 2025

**Question 1 (1 pt)**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Écrire $A$ comme une combinaison linéaire de matrices élémentaires.

$A = 3E_{1,1} + E_{1,2} - 2E_{2,2}$. □

**Question 2 (1 pt)**

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$.

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

**Question 3 (1 pt)**

Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices.
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors pour $p \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

□

**Question 4 (1 pt)**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. $A$ est symétrique si : $A^\top = A$
2. $A$ est antisymétrique si : $A^\top = -A$ □

**Question 5 (2 pts)**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Le déterminant de $A$ est : $\det(A) = ad - bc$
2. La matrice $A$ est inversible si et seulement si : $\det(A) \neq 0$
3. Si $A$ est inversible, son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

**Question 6 (1 pt)**

Soit $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall i \in [\![1, n]\!], d_i \neq 0.$
2. Si $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $D^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \ldots, \frac{1}{d_n}\right)$. □

**Question 7 (4 pts)**

1. Soit $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&1&1\\3&1&-3\end{pmatrix}$. Calculer $\det(A)$. La matrice $A$ est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.
On fait $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$ et on développe par rapport à la permière ligne :
$$\begin{vmatrix}1&0&-1\\-2&1&1\\3&1&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&-1\\-1&1&1\\0&1&-3\end{vmatrix}=-1\times\begin{vmatrix}-1&1\\0&1\end{vmatrix}=1$$
Donc $A$ est inversible.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\-2&1&1&0&1&0\\3&1&-3&0&0&1\end{array}\right)\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1\\L_3\leftarrow L_3-3L_1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&-1&2&1&0\\0&1&0&-3&0&1\end{array}\right)\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&-1&2&1&0\\0&0&1&-5&-1&1\end{array}\right)$$
$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_3\\L_1\leftarrow L_1+L_3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-4&-1&1\\0&1&0&-3&0&1\\0&0&1&-5&-1&1\end{array}\right)$$
Ainsi $A^{-1}=\begin{pmatrix}-4&-1&1\\-3&0&1\\-5&-1&1\end{pmatrix}$.
2. Soit $B=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. Calculer $\det(B)$. La matrice $B$ est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.
On fait $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et on développe par rapport à la dernière colonne :
$$\begin{vmatrix}3&2&1\\2&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\2&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=-1\times\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0.$$
La matrice $B$ n'est pas inversible. ☐

**Question 8 (3 pts)**

VRAI OU FAUX (sans justifier).
Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si $AB=0_n$ alors $A=0_n$ ou $B=0_n$. ☐ VRAI ■ FAUX
2. Si $A$ et $B$ sont diagonales, alors $\forall(i,j)$, $[AB]_{ij}=[A]_{ij}[B]_{ij}$. ■ VRAI ☐ FAUX
3. $(AB)^\top=B^\top A^\top$. ■ VRAI ☐ FAUX
4. Si $A,B\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $AB\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$. ☐ VRAI ■ FAUX
5. Si $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&1\end{pmatrix}$. ■ VRAI ☐ FAUX
6. La matrice $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ est triangulaire. ■ VRAI ☐ FAUX

. ☐