

Colles 16 - 27/01/2025 au 31/01/2025

Thèmes traités en classe

- Chapitre 14 : Suites numériques.
Exercices traités en classe : I.1, I.2 I.3, I.4, I.5, I.8, I.9, I.10, I.13, II.3, II.4, II.5, II.6, II.7, II.8, II.9, II.10, II.15, II.14, II.12, II.17, II.18, II.19, II.20, II.21
- Chapitre 15 : Calcul matriciel.
 1. Combinaisons linéaires de matrices.
 2. Produit matriciel, puissances de matrices carrées, Newton.
 3. Matrices élémentaires.
 4. Transposée, matrices symétriques et antisymétriques.
 5. Matrices diagonales et triangulaires.
 6. Solutions d'un systèmes, Vect.
 7. Matrices inversibles.
 8. Le déterminant (outil).
 9. Matrices d'opérations élémentaires.

Exercices traités en classe : 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 16.

Questions de cours

- C14 Exercice II.14 : Soit (u_n) une suite numérique et $k \in]0, 1[$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq k|u_n|$. Montrer que (u_n) converge vers 0.
- Définition de domination, négligeabilité, équivalence. Montrer que $n! = o(n^n)$.
- C14 Exercice II.19 : Pour tout $n \geq 2$, on pose $u_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ et $v_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- Définition du produit matriciel : avec la formule et avec un dessin. Calcul du produit de deux matrices élémentaires : avec un dessin puis avec la formule.
- C15 Exercice 5-2 : Toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- C15 Exercice 16-1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si une colonne de A est une combinaison linéaire des autres, alors A n'est pas inversible. Démonstration si c'est la première colonne.
- Caractérisation des matrices diagonales inversibles avec la démonstration.

A savoir faire

1. Étudier la monotonie d'une suite.
2. Savoir déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique et d'une suite récurrente d'ordre 2.
3. Savoir utiliser l'étude des fonctions f et $x \mapsto f(x) - x$ pour étudier la monotonie de $u_{n+1} = f(u_n)$.
4. Connaître les définitions de $u_n \rightarrow \ell$ et $u_n \rightarrow \pm\infty$.
5. Savoir appliquer proprement les théorèmes d'encadrement et de la limite monotone.
6. Savoir encadrer une somme en utilisant le plus petit terme et le plus grand terme.
7. Savoir montrer que deux suites sont adjacentes.
8. Savoir trouver un équivalent simple d'une suite et en déduire une limite.
9. Savoir calculer un produit matriciel.
10. Savoir calculer les puissances d'une matrice :
 - (a) en conjecturant une formule démontrée par récurrence,

(b) en appliquant Newton.

(c) en utilisant $(PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$.

11. Savoir tester si une matrice est inversible avec le déterminant.
12. Savoir calculer l'inverse d'une matrice avec le pivot de Gauss, ou en utilisant une relation entre les puissances d'une matrice.