Chapitre 16 : Continuité

I. Notion de limite d'une fonction

Dans tout ce qui suit, I est un intervalle (ou une union d'intervalles) de $\mathbb{R}$ et $\overline{I}$ est l'intervalle I (ou l'union d'intervalles) avec ses bornes comprises ($\pm\infty$ y compris). On rappelle aussi la définition :

Définition I.1. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit qu'une partie $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de a si :
- lorsque $a \in \mathbb{R}$: il existe $\delta > 0$ avec $]a-\delta, a+\delta[\subset V$;
- lorsque $a = +\infty$: il existe $A \in \mathbb{R}$ avec $]A, +\infty[\subset V$;
- lorsque $a = -\infty$: il existe $A \in \mathbb{R}$ avec $]-\infty, A[\subset V$.

I.1. Limite finie d'une fonction en un point

Définition I.2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$ un réel. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
- On dit que f admet ℓ comme limite en a si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.
- On dit que f admet ℓ comme limite à gauche en a si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, a - \alpha \leq x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$
On note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} \ell$, $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x < a}]{} \ell$.
- On dit que f admet ℓ comme limite à droite en a si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, a < x \leq a + \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$
On note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} \ell$, $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x > a}]{} \ell$.

Proposition I.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$ un réel. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.*
$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff f(x) - \ell \xrightarrow[x \to a]{} 0 \iff f(a+h) \xrightarrow[h \to 0]{} \ell.$$

I.2. Limite d'une fonction

On généralise la notion de limite du paragraphe précédent : si $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors on dit que f admet ℓ comme limite en a si pour tout voisinage W de ℓ, il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in I$, $x \in V \Rightarrow f(x) \in W$.

Définition I.3. Limite infinie en un réel a :
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, |x-a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$.
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, a < x \leq a + \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$.
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, a - \alpha \leq x < a \Rightarrow f(x) \geq A$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, |x-a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq A$.
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, a < x \leq x + \alpha \Rightarrow f(x) \leq A$.
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, a - \alpha \leq x < a \Rightarrow f(x) \leq A$.

Limite finie en $\pm\infty$:
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell \iff \forall\varepsilon>0, \exists A\in\mathbb{R} \mid \forall x\in I, x\leq A \Rightarrow |f(x)-\ell|\leq\varepsilon$.

Limite infinie en $\pm\infty$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \iff \forall B\in\mathbb{R}, \exists A\in\mathbb{R} \mid \forall x\in I, x\geq A \Rightarrow f(x)\geq B$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \iff \forall B\in\mathbb{R}, \exists A\in\mathbb{R} \mid \forall x\in I, x\geq A \Rightarrow f(x)\leq B$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \iff \forall B\in\mathbb{R}, \exists A\in\mathbb{R} \mid \forall x\in I, x\leq A \Rightarrow f(x)\geq B$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \iff \forall B\in\mathbb{R}, \exists A\in\mathbb{R} \mid \forall x\in I, x\leq A \Rightarrow f(x)\leq B$.

Proposition I.2 (Unicité de la limite). *Soit $f : I\to\mathbb{R}$ et $a\in\overline{I}$. Soit $\ell,\ell'\in\overline{\mathbb{R}}$.*

1. *Si f est définie en a et si $f \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, alors on a forcément $\ell=f(a)$.*
2. *Si f tend vers ℓ et ℓ' en a (resp. a^+, resp. a^-), alors $\ell=\ell'$.*

Proposition I.3. *Soit f une fonction définie dans un voisinage de a, sauf éventuellement en a.*

- *Si f n'est pas définie en a, f admet une limite en a ssi elle admet une limite à gauche ℓ_- et une limite à droite ℓ_+ et $\ell_-=\ell_+$.*
- *Si f est définie en a, f admet une limite en a ssi $f(x)\xrightarrow[x\to a^+]{} f(a)$ et $f(x)\xrightarrow[x\to a^-]{} f(a)$.*

Proposition I.4. *Soit $f : I\to\mathbb{R}$ et $a\in\overline{I}$. Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a :*

- *si $a\in\mathbb{R}$: $\exists\alpha>0, \exists M\in\mathbb{R} \mid \forall x\in I, |x-a|\leq\alpha \Rightarrow |f(x)|\leq M$*
- *si $a=+\infty$: $\exists A\in\mathbb{R}, \exists M\in\mathbb{R} \mid \forall x\in I, x\geq A \Rightarrow |f(x)|\leq M$*
- *si $a=-\infty$: $\exists A\in\mathbb{R}, \exists M\in\mathbb{R} \mid \forall x\in I, x\leq A \Rightarrow |f(x)|\leq M$*

Proposition I.5 (Caractérisation séquentielle). *Soit $f : I\to\mathbb{R}$, $a\in\overline{I}$ et $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$. On a l'équivalence :*

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell \iff \left(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in I^{\mathbb{N}}, \lim u_n=a \Rightarrow \lim f(u_n)=\ell\right)$$

On se sert souvent de cette proposition pour démontrer qu'une fonction f n'a pas de limite en a : on trouve deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers a mais telles que $f(u_n)$ et $f(v_n)$ ne convergent pas vers la même limite.

Exemple I.1. La fonction $f(x)=\sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$. En effet, soient $u_n=2n\pi$ et $v_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$. Ces deux suites convergent vers $+\infty$, mais $f(u_n)=0\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $f(v_n)=1\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ n'ont pas la même limite.

I.3. Opérations sur les limites

Limite d'une somme

$\lim f$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim (f+g)$	$\ell+\ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un produit

$\lim f$	ℓ	$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim (f\times g)$	$\ell\times\ell'$	$*\infty$	$*\infty$	FI

Limite d'un quotient

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$0^{\pm}$	ℓ'	$\pm\infty$	0
$\lim \left(\dfrac{f}{g}\right)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$*\infty$	$*\infty$	FI	FI

Proposition I.6. *Soient a, b et ℓ des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x)=\ell$ alors $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to a} g[f(x)]=\ell$.*

I.4. Limites et inégalités

> **Proposition I.7.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Si f tend vers une limite strictement positive en a, alors f est strictement positive sur un voisinage de a.*

Comme avec les suites, les inégalités larges passent à la limite.

> **Proposition I.8.** *Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell'$ et que $f(x) \le g(x)$ au voisinage de a, alors $\ell \le \ell'$.*

Théorème I.9

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Si pour x au voisinage de a	*et lorsque x tend vers a*	*alors*
$u(x) \le f(x)$	$u(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$	$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$
$f(x) \le u(x)$	$u(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$	$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$
$\lvert f(x) - \ell\rvert \le u(x)$	$u(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$	$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$
$u(x) \le f(x) \le v(x)$	$u(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $v(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$	$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$

I.5. Limite monotone

Théorème I.10 (Théorème de la limite monotone)

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. *La limite $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existe et est soit finie (si f est minorée), soit égale à $-\infty$.*
2. *Pour tout $c \in]a, b[$, f admet une limite finie à gauche et à droite en c et*
$$\lim_{x\to c^-} f(x) \le f(c) \le \lim_{x\to c^+} f(x).$$
3. *La limite $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existe et est soit finie (si f est majorée), soit égale à $+\infty$.*

Remarque I.1. Si f est décroissante, $-f$ est croissante, donc on adapte facilement le théorème précédent.

II. Comparaison de fonctions

II.1. Domination et négligeabilité

> **Définition II.1.** Soient f et g définies sur un intervalle I et $a \in \overline{I}$. On suppose de plus que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$ et si $g(a) = 0$, alors $f(a) = 0$. On dit que :
>
> 1. la fonction f est **dominée** par g au voisinage de a si la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée sur un voisinage V de a privé de a :
> $$\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in (V \cap I) \setminus \{a\}, \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le M$$
> On note alors $f \underset{x\to a}{=} O(g)$.
> 2. la fonction f est **négligeable** devant g au voisinage de a si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note alors $f \underset{x\to a}{=} o(g)$.

Remarques II.1. 1. En pratique, soit on étudie la limite du quotient $\frac{f}{g}$ en a, soit on étudie la fonction $\frac{f}{g}$ en cherchant ses extrema au voisinage de a.

2. f est bornée au voisinage de $a \iff f(x) \underset{x\to a}{=} O(1)$.
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \iff f(x) \underset{x\to a}{=} \ell + o(1)$.
4. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$.

Proposition II.1 (Croissances comparées). *Soient $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$.*

1. $(\ln x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$.
2. $x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(a^x)$.
3. $(\ln x)^\alpha \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$.
4. $a^x \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$.

Proposition II.2. *1. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f(x) + \mu g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.*

2. *Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(\lambda g(x))$.*
3. *Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)h(x))$.*
4. *Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $h(x) \underset{x\to a}{=} o(i(x))$ alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)i(x))$.*
5. *Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.*
6. *Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors $|f(x)| \underset{x\to a}{=} o(|g(x)|)$.*
7. *Si $\lim\limits_{x\to b} \varphi(x) = a$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, alors $f\circ\varphi(x) \underset{x\to b}{=} o(g\circ\varphi(x))$.*

Les propriétés restent vraies avec O.

Remarque II.2. On peut donc remplacer $o(g(x)) + o(g(x))$ par $o(g(x))$, $o(2g(x))$ par $o(g(x))$ et, en $+\infty$, $o(\ln x)$ par $o(x)$.

II.2. Équivalence

Définition II.2. Soient f et g définies sur un intervalle I et soit $a \in \overline{I}$. On suppose de plus que f et g ne s'annulent pas sur $I \setminus \{a\}$ et $f(a) = 0 \iff g(a) = 0$. On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Proposition II.3. *1. **Reflexivité :** $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.*

2. ***Symétrie :** $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.*
3. ***Transitivité :** Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.*
4. *$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ (on écrit $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$).*

Proposition II.4. *Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :*

1. $f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)g_2(x)$;
2. $\frac{1}{f_1(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{1}{g_1(x)}$;
3. $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$;
4. $(f_1(x))^\lambda \underset{x\to a}{\sim} (g_1(x))^\lambda$ *(lorsque cela a un sens).*

Remarque II.3. Attention, on n'ajoute pas les équivalents. Par exemple, en prenant $f(x) = x - x^3 + x^5$ et $g(x) = -x + x^2 - x^7$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$, mais on n'a certainement pas $f(x) + g(x) \underset{x\to 0}{\sim} 0$!
Par contre, $f(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x^2)$ et $g(x) \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 + o(x^2)$, donc $f(x) + g(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + o(x^2)$. D'où $f(x) + g(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$.

Proposition II.5. *Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} \varphi(x) = a$, alors $f\circ\varphi(x) \underset{x\to b}{\sim} g\circ\varphi(x)$.*

Remarque II.4. Attention, on ne peut pas composer dans l'autre sens en général. En effet, $x \underset{x\to+\infty}{\sim} x+1$, mais $e^x \underset{x\to+\infty}{\not\sim} e^{x+1}$ car $\dfrac{e^x}{e^{x+1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{e}$.

Proposition II.6. *Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$*

1. *alors soit f et g ont la même limite en a, soit aucune des deux n'a de limite en a ;*
2. *alors f et g ont le même signe dans un voisinage de a ;*
3. *et si $f \leq h \leq g$ dans un voisinage de a, alors $h(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.*

II.3. Exemples importants

Proposition II.7.

1. *Si $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$, alors $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$.*
2. *Si $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots a_p x^p$, avec $a_p \neq 0$, alors $Q(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$.*
3. $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
4. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
5. $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.
6. $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.
7. $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
8. $(1+x)^\lambda - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \lambda x$.
9. $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
10. $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
11. $\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

III. Continuité

III.1. Continuité en un point

Définition III.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. On dit que f est **continue en** a si f admet une limite en a. On a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Ainsi, f est continue en a ssi
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$
2. On dit que f est **continue à droite** (resp. **à gauche**) en a si f admet une limite à droite (resp. à gauche) en a et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$).

Les propositions suivantes découlent des propositions analogues sur les limites.

Proposition III.1. *Une fonction est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.*

Proposition III.2. *Soient f et $g \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f et g sont continues en a, alors :*

1. *$\lambda f + \mu g$ et fg sont continues en a.*
2. *Si $f(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{g}{f}$ sont continues en a.*

Proposition III.3. *Soient $f \in \mathscr{F}(I,J)$ et $g \in \mathscr{F}(J,\mathbb{R})$ et $a \in I$.*

1. *Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.*
2. *f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ qui converge vers a, on a $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.*

Remarque III.1. Ainsi, pour vérifier qu'une fonction f est continue en un point a, on a en général deux méthodes :

1. On utilise les fonctions usuelles et les opérations sur ces fonctions.
2. On calcule les limites à gauche et à droite en a et on vérifie qu'elles sont égales à $f(a)$.

Corollaire III.4. *Soit $f : I \to I$, (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers ℓ et $\ell \in I$ et f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$. On dit que ℓ est un **point fixe** de f.*

III.2. L'ensemble $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$

Définition III.2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point $a \in I$.
On note $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I et à valeurs réelles.

Exemples III.1.
1. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Les fonctions puissances sont continues sur leurs ensembles de définition.
4. Les fonctions trigonométriques et leurs réciproques sont continues sur leurs ensembles de définition.
5. Les fonctions exponentielles et logarithmes sont continues sur leurs ensembles de définition.
6. N'importe quelle fonction obtenue à partir des précédentes par des opérations ou en composant est continue sur son ensemble de définition.

Définition III.3. Soit $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. On dit que f est **prolongeable par continuité en** a si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et est finie.

Proposition III.5. *Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction prolongeable par continuité en a. Alors la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x \in I \setminus \{a\}$ et $g(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ est continue en a.*

III.3. Fonctions continues sur un segment

Un segment est un intervalle de la forme $[a,b]$.

Théorème III.6 (Théorème des bornes atteintes)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes, autrement dit :

$$\exists x_{min} \in [a,b] \mid \forall x \in [a,b], f(x_{min}) \leq f(x)$$
$$\exists x_{max} \in [a,b] \mid \forall x \in [a,b], f(x_{max}) \geq f(x)$$

Remarque III.2. Attention, le théorème est faux si l'ensemble de départ n'est pas un segment !

Théorème III.7 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.

Remarque III.3. En particulier, si une fonction continue sur $[a,b]$ a un signe différent en a et en b, alors elle s'annule au moins une fois sur l'intervalle.
La contraposée nous dit que si f ne s'annule jamais sur $[a,b]$, alors elle est toujours du même signe.

Démonstration. *Supposons que $f(a) \leq y \leq f(b)$. On procède par dichotomie. Définissons deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et :*

- *si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < y$, on pose $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$;*
- *sinon, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.*

On montre par récurrence sur n que $a_n \le b_n$ et $f(a_n) \le y \le f(b_n)$:

- *Initialisation : $a_0 = a \le b = b_0$ et $f(a) \le y \le f(b)$, donc la propriété est vraie au rang 0.*
- *Hérédité : soit $n \ge 0$. Supposons $a_n \le b_n$ et $f(a_n) \le y \le f(b_n)$.*
  Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < y$, alors $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \le b_n = b_{n+1}$ car $a_n \le b_n$ par HR. On a bien $f(a_{n+1}) \le y$ et $f(b_{n+1}) = f(b_n) \ge y$.
  Sinon, $a_{n+1} = a_n \le \frac{a_n+b_n}{2} = b_{n+1}$ car $a_n \le b_n$ par HR. On a bien $f(a_{n+1}) = f(a_n) \le y$ et $f(b_{n+1}) \ge y$.
  Dans les deux cas, la propriété est vraie au rang $n+1$.

On conclut donc d'après le principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \le b_n$ et $f(a_n) \le y \le f(b_n)$.
Puis, pour $n \in \mathbb{N}$, si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < y$ alors $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \ge a_n$ et $b_{n+1} = b_n$. Sinon, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \le b_n$. Donc (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
Enfin, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$ dans les deux cas. Donc la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de rapport $\frac{1}{2}$. Elle converge donc vers 0.
Ainsi, (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Notons c la limite commune. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \le y \le f(b_n)$, en passant à la limite dans ces inégalités, et par continuité de f, on trouve $f(c) \le y \le f(c)$. Donc $f(c) = y$. □

Une application du TVI nous donne l'énoncé suivant.

> **Corollaire III.8.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'ensemble $f(I)$ est un intervalle.*

En utilisant en plus le TBA.

> **Corollaire III.9.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*
> - $f(I) = [\min_I f, \max_I f]$.
> - *Si f est croissante sur $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.*
> - *Si f est décroissante sur $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$.*

Remarque III.4. Lorsque l'intervalle est ouvert en a (ou en b), on remplace $f(a)$ (ou $f(b)$) par $\lim_{x\to a} f(x)$ (ou $\lim_{x\to b} f(x)$) en ouvrant le crochet de l'image aussi.

III.4. Bijections continues

Théorème III.10 (Théorème de la bijection monotone)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I.
La fonction f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.
De plus, $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et strictement monotone sur $f(I)$ de même monotonie que f.

IV. Fonctions à valeurs complexes

Lorsque la fonction est à valeurs complexes, on peut adapter les définitions de limite finie en un point ou en $\pm\infty$ facilement. Par exemple, pour une limite finie en un réel :

> **Définition IV.1.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in \overline{I}$ un réel. On dit que f admet $\ell \in \mathbb{C}$ pour limite en a si :
>
> $$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, |x-a| \le \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \le \varepsilon.$$

Attention, il n'y a pas de limite $\pm\infty$ pour une fonction à valeurs complexes.
Les notions de limites à droite/gauche, la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, la caractérisation séquentielle, les opérations sur les limites sont encore valables (en excluant tous les cas $\pm\infty$).
Les grands théorèmes d'existence ne fonctionnent pas à cause des inégalités.

Définition IV.2. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, |f(x)| \leq M.$$

On a toujours qu'une fonction qui admet une limite finie en a est bornée au voisinage de a.
La définition de continuité s'adapte très bien aussi :

Définition IV.3. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$. On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Proposition IV.1. *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in \overline{I}$. Alors :*

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x \to a} \mathrm{Re}(f(x)) = \mathrm{Re}(\ell)$ *et* $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{Im}(f(x)) = \mathrm{Im}(\ell)$.
2. *f est continue sur I ssi* $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont continues sur I.*