Contrôle de cours 13 - Continuité - Sujet A
Mercredi 29 janvier 2025

Question 1 (3 pts)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{I}$ un réel et $\ell \in \mathbb{R}$. Rappeler les définitions avec des quantificateurs de :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$:
   $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$:
   $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq A$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$:
   $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, a < x \leq a + \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$ □

Question 2 (5 pts)

Rappeler les 11 équivalents usuels.

1. Si $a_n \neq 0$, $a_n x^n + \cdots + a_0 \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$;
2. si $a_p \neq 0$, $a_n x^n + \cdots + a_p x^p \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$;
3. $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
4. $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
5. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
6. $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$;
7. $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
8. $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
9. $(1+x)^\lambda - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \lambda x$ si $\lambda \neq 0$;
10. $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$;
11. $\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. □

Question 3 (1 pt)

Énoncer le TVI :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a < b$ deux éléments de I.
Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$. □

Question 4 (1 pt)

Déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin(2x)}$.

Comme $\sin(X) \underset{X\to 0}{\sim} X$ et $2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a $\sin(2x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$. Donc $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin(2x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$. D'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin(2x)} = \dfrac{1}{2}$. □

Question 5 (1 pt)

Énoncer le TBA :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes :
$\exists x_{\min}, x_{\max} \in [a, b] \mid \forall x \in [a, b],\ f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$. □

Contrôle de cours 13 - Continuité - Sujet B
Mercredi 29 janvier 2025

Question 1 (3 pts)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{I}$ un réel et $\ell \in \mathbb{R}$. Rappeler les définitions avec des quantificateurs de :

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$:
   $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, |x-a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \ell$:
   $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, x \leq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$:
   $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, a - \alpha \leq x < a \Rightarrow f(x) \leq A$ ☐

Question 2 (5 pts)

Rappeler les 11 équivalents usuels.

1. Si $a_n \neq 0$, $a_n x^n + \cdots + a_0 \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$;
2. si $a_p \neq 0$, $a_n x^n + \cdots + a_p x^p \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$;
3. $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
4. $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
5. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
6. $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$;
7. $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
8. $\text{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
9. $(1+x)^\lambda - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \lambda x$ si $\lambda \neq 0$;
10. $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$;
11. $\text{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. ☐

Question 3 (1 pt)

Déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de $\dfrac{\tan(3x)}{e^x - 1}$.

Comme $\tan(X) \underset{X\to 0}{\sim} X$ et $3x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a $\tan(3x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x$. Donc $\dfrac{\tan(3x)}{e^x-1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{3x}{x} = 3$. D'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x)}{e^x-1} = 3$. ☐

Question 4 (1 pt)

Énoncer le TVI :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a < b$ deux éléments de I.
Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$. ☐

Question 5 (1 pt)

Énoncer le TBA :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes :
$\exists x_{\min}, x_{\max} \in [a,b] \mid \forall x \in [a,b],\ f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$. ☐