

**Colles 17 - 03/02/2025 au 07/02/2025**

## Thèmes traités en classe

- Chapitre 15 : Calcul matriciel.  
**Exercices traités en classe :** 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 7, 15.
- Chapitre 16 : Continuité.
  1. Limite d'une fonction, limite à droite, limite à gauche.
  2. Caractérisation séquentielle.
  3. Opérations, limites et inégalités.
  4. Limite monotone.
  5. Comparaison de fonctions : domination, négligeabilité, équivalence.
  6. Équivalents usuels.
  7. Continuité, prolongement par continuité.
  8. Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires.
  9. Théorème des bornes atteintes.
  10. Théorème de la bijection monotone.
  11. Fonctions à valeurs complexes.

**Exercices traités en classe :** I.3, II.3, III.1, III.2, III.3, III.4, III.5, III.7.

## Questions de cours

- C15 Exercice 5-2 : Toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- C15 Exercice 16-1 : Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}, (PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$ .
- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si une colonne de  $A$  est une combinaison linéaire des autres, alors  $A$  n'est pas inversible. Démonstration si c'est la première colonne.
- Caractérisation des matrices diagonales inversibles avec la démonstration.
- Application du TVI : soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  une fonction continue. Montrer que  $f$  admet au moins un point fixe.
- Application du TVI : soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction polynomiale de degré 3. Montrer que  $f$  s'annule au moins une fois sur  $\mathbb{R}$ .
- Donner les équivalents usuels et en démontrer quelques-uns.
- Énoncer le TVI, TBA et TBM. Expliquer le principe de la dichotomie pour la démonstration du TVI. Pour les plus motivés : faire la démonstration complète du TVI.

## A savoir faire

1. Savoir calculer un produit matriciel.
2. Savoir calculer les puissances d'une matrice :
  - (a) en conjecturant une formule démontrée par récurrence,
  - (b) en appliquant Newton.
  - (c) en utilisant  $(PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$ .
3. Savoir tester si une matrice est inversible avec le déterminant.
4. Savoir calculer l'inverse d'une matrice avec le pivot de Gauss, ou en utilisant une relation entre les puissances d'une matrice.
5. Savoir déterminer une limite avec un encadrement.
6. Savoir manipuler les équivalents et les  $o$ .
7. Savoir justifier qu'une fonction est continue sur un intervalle/en un point.
8. Savoir vérifier si une fonction est prolongeable par continuité en un point.
9. Savoir appliquer le TVI, TBA et TBM en vérifiant précisément les hypothèses.