Dérivabilité - Exercices

I. Dérivabilité

Exercice I.1. On souhaite démontrer que sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$.
On se place pour cela dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit $h \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$. On note M le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne h et N le point d'intersection de (OM) avec la droite d'équation $x = 1$.

1. Quelles sont les aires des triangles OIM et OIN en fonction de h ?
2. Quelle est l'aire du secteur angulaire définit par l'angle h ?
3. En déduire que $\cos h \leq \dfrac{\sin h}{h} \leq 1$ puis montrer que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$.
4. En utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$, montrer que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$.
5. En utilisant les formules d'addition, montrer que sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Exercice I.2. Pour chacune des fonctions réelles suivantes, déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable (sans se préoccuper de l'étude aux bornes).

1. $f_1 : x \mapsto e^x \ln(\sin(x))$;
2. $f_2 : x \mapsto \arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$;
3. $f_3 : x \mapsto \ln(|x^2 - 3x + 2|)$;
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{|1-x^2|}$;
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$.

Exercice I.3.
1. (a) Donner l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$.
   (b) Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$? Si oui, le prolongement obtenu est-il dérivable sur $\mathbb{R}$? Si oui, la dérivée est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Mêmes questions avec $g(x) = x^x$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice I.4.
1. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2x^2 + x + 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 3x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{array}$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
2. La fonction f définie par $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}^+$? Si oui, sa dérivée est-elle continue ?
3. Trouver $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{si } x < \alpha \\ x^2 + 12 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases} \end{array}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée continue.

II. Rolle et accroissements finis

Exercice II.1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si f' ne s'annule pas, alors f n'est pas périodique.

Exercice II.2. Soit $n \geq 1$ un entier naturel et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que l'équation $f(x) = 0$ a n solutions dans $\mathbb{R}$.
1. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ a au moins $n-1$ solutions dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $g : x \mapsto e^{\alpha x} f(x)$. Montrer en utilisant g que l'équation $\alpha f(x) + f'(x) = 0$ a au moins $n-1$ solutions réelles.
3. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On suppose que f est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f^{(k)}(x) = 0$ a au moins $n-k$ solutions réelles.

Exercice II.3. Montrer les inégalités suivantes :
1. $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$; 2. $\forall x \in]0,1[, \arcsin x \leq \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 3. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a \leq b \Rightarrow \dfrac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \dfrac{b-a}{1+a^2}$;

Exercice II.4. Déterminer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - x e^{\frac{1}{x}}$.

Exercice II.5. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que $f'(x) > 0$ pour tout x de $[0,1]$.

1. Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que : $\forall x \in [0,1], f'(x) \geq \lambda$.
2. En déduire que si $f(0) = 0$ alors : $\forall x \in [0,1], f(x) \geq \lambda x$.

Exercice II.6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \ell$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.
On pourra considérer la fonction $g : x \mapsto f(\tan(x))$.

Exercice II.7. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(1) = 0$.
Montrer qu'il existe un point M de $\mathscr{C}_f$ tel que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en M passe par O.
On pourra appliquer le théorème de Rolle à la fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice II.8. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(1)f'(1) < 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice II.9. Soit $\alpha \in]0,1[$. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ pour tout entier $n > 0$.

1. En utilisant l'IAF, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1-\alpha}{(k+1)^\alpha} \leq (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leq \dfrac{1-\alpha}{k^\alpha}$.
2. En déduire un encadrement de $\dfrac{1}{k^\alpha}$ pour $k \geq 2$.
3. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Donner un équivalent de $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice II.10. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Montrer que : $\dfrac{1}{b} \leq \dfrac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} \leq \dfrac{1}{a}$.
En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

III. Dérivations successives

Exercice III.1. Calculer les dérivées n-ième des fonctions (où $n \in \mathbb{N}^*$) :
1. $f(x) = x^2(1+x)^n$ 2. $g(x) = x^{n-1}\ln x$ 3. $h(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$
Pour h, on pourra commencer par calculer $h', h'', h^{(3)}$, puis procéder par récurrence.

Exercice III.2.

1. La fonction $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2+x & \text{si } x \geq 0 \\ \mathrm{e}^x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$ est-elle $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? et $\mathscr{C}^2$?
2. Soit $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} ax^2+bx+c & \text{si } x \geq 1 \\ \mathrm{e}^x & \text{si } x < 1 \end{cases} \end{array}$. Pour quelles valeurs de a, b, c la fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^2$? Est-elle alors de classe $\mathscr{C}^3$?

Exercice III.3. Montrer que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note argsh sa fonction réciproque. Justifier que argsh est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer argsh$'$.

Exercice III.4. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. On souhaite montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

C'est la formule de Taylor-Lagrange.

1. Écrire la formule pour $n = 0$ et la démontrer.

2. Justifier qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - A(b-a)^{n+1} = 0$.

   On pose $g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - A(b-x)^{n+1}$.
3. Justifier que g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
4. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.
5. En déduire la formule de Taylor-Lagrange.

IV. Applications

Exercice IV.1. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+x}$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étude de f.
   - (a) Étudier les variations de f.
   - (b) Déterminer $f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$.
   - (c) Montrer que : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.
   - (d) Justifier que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution α dans $[0, +\infty[$.
2. Étude de (u_n) : première méthode.
   - (a) Montrer par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   - (b) Montrer que (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante.
   - (c) En déduire que (u_n) converge vers α.
3. Étude de (u_n) : deuxième méthode.
   - (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$.
   - (b) Montrer par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.
   - (c) En déduire la limite de (u_n).
   - (d) Pour quelle valeur de n le terme u_n donne une valeur approchée de α à 10^{-6} près?

Exercice IV.2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$ et par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.
2. À l'aide de l'IAF, montrer que (u_n) converge vers 1.

Exercice IV.3. On considère l'équation $(E) : (x-1)\,\mathrm{e}^x + x = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution réelle α et déterminer sa partie entière.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^{u_n} + 1}$.
   - (a) En étudiant la fonction $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$, montrer que la suite (u_n) converge vers α.
   - (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
   - (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}$.

Exercice IV.4. Étudier les suites récurrentes définies par :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}$.
2. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{6}{2+u_n^2}$.
3. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{2(u_n + 1)}$.
4. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n}{\ln(u_n) + 1}$.

Exercice IV.5. Étudier complètement les fonctions suivantes (ensemble de définition, régularité, variations, limites, prolongements éventuels, asymptotes, tracé) :

1. $f(x) = \ln\left(2 - e^{\frac{1}{x}}\right)$ 2. $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{x}\, e^{\frac{1}{x}}$ 3. $h(x) = x^{x+1}$

Exercice IV.6. On définit $\varphi : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi]$ et $\psi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = t - \sin t$ et $\psi(t) = 1 - \cos t$.

1. Montrer que φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$ et qu'elle admet une fonction réciproque φ^{-1} qui est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$.
2. On définit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$. Justifier que f est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$.
3. Étudier les variations de f sur $[0, 2\pi]$.
4. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$. Que peut-on en déduire ?
5. Calculer $\varphi(2\pi - \varphi^{-1}(x))$ puis $\varphi^{-1}(2\pi - x)$ et en déduire que $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite $x = \pi$.
6. Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$.

V. Convexité

Exercice V.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

1. On suppose que f est convexe sur I.
   (a) Montrer que pour tout $a, b, c \in I$ avec $a < c < b$, on a : $\dfrac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \dfrac{f(b) - f(c)}{b - c}$.
   On commencera par faire un dessin.
   (b) En déduire que f' est croissante sur I.
2. On suppose que f' est croissante sur I.
   (a) Soit $a, b \in I$ avec $a < b$. On considère la fonction $g : t \in [0, 1] \mapsto t f(a) + (1 - t) f(b) - f(ta + (1 - t)b)$. Justifier que g est dérivable sur $[0, 1]$ et que g' est monotone sur $[0, 1]$.
   (b) En déduire que g est d'abord croissante puis décroissante sur $[0, 1]$.
   (c) En déduire que f est convexe sur I.

Exercice V.2.

1. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ e^{\frac{x+y}{2}} \leq \dfrac{e^x + e^y}{2}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi} x \leq \sin(x) \leq x$.
3. Montrer que : $\forall x, y > 1,\ \sqrt{\ln(x)\ln(y)} \leq \ln\left(\dfrac{x + y}{2}\right)$.
4. Soit $n \geq 2$. Montrer que pour tout $x \geq -1$, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice V.3. Soit $f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ deux fonctions convexes. On suppose que g est croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.