Continuité - Exercices

I. Limites

Exercice I.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer en utilisant les quantificateurs que :

1. $\lim\limits_{x \to x^+} \sqrt{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.

Exercice I.2. Étudier la limite en a de la fonction f pour :

1. $a = 1$ et $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
2. $a \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^n - a^n}{x^p - a^p}$ $(p, n \in \mathbb{N}^*)$
3. $a = 0$ et $f(x) = x^2 + \dfrac{\sqrt{x}}{x}$
4. $a = +\infty$ et $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$
5. $a = -\infty$ et $f(x) = 3 + \sqrt{x^2 - 5x} - \sqrt{x^2 - 1}$
6. $a = 0$ et $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin(3x)}$
7. $a = +\infty$ et $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$
8. $a = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$
9. $a \geq 0$ et $f(x) = \dfrac{x - a}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$
10. $a = 1$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$
11. $a = +\infty$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$
12. $a = 0$ et $f(x) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}{x^2 + 1}$
13. $a = 1$ et $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$
14. $a = +\infty$ et $f(x) = x \cos x$
15. $a = \pm\infty$ et $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + \mathrm{e}^x)}{2 + x}$
16. $a = 0^+$ et $f(x) = x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$
17. $a = +\infty$ et $f(x) = x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$

Exercice I.3. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et g est bornée dans un voisinage de a, alors fg tend vers 0 en a.

II. Comparaison de fonctions

Exercice II.1.
1. Montrer que $\mathrm{e}^{\sqrt{x}} \underset{x \to +\infty}{=} o(\mathrm{e}^x)$.
2. On considère deux fonctions réelles f et g telles que $f \underset{+\infty}{\sim} g$. A-t-on $\mathrm{e}^f \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^g$?

Exercice II.2.
1. Montrer que $\sin(\arccos x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1 - x}$.
2. Déterminer un équivalent simple de $\arccos x$ en 1.
3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin \dfrac{x}{x+1}$.
   Déterminer l'ensemble de définition de f, sa limite en $+\infty$ et un équivalent de f en $+\infty$.
   On rappelle (!) la formule bien connue (!) : $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice II.3. En utilisant des équivalents, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 1}{2x^2 + 1}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 + 2x}{x^5 - x^2 + x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x(2 - x)\tan(2x)}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \mathrm{e}^x)\sin x}{x^2 + x^3}$
5. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x \tan(2x)$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$
7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + 3x)}{x}$
8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x}$
9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{5x} - \mathrm{e}^{3x}}{x}$
10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{\sin x} - 1}$
11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x - 2^x}{x}$
12. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$
13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x}$
14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x + x^2}$
15. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x\sqrt{x + 3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$
16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$
17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \mathrm{e}^x)(1 - \cos x)}{x^3 + x^4}$
18. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin((n+1)x)}{\sin x}$, $n \in \mathbb{N}$

Exercice II.4. 1. Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes lorsque $x \to +\infty$:

(a) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$ | (b) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$

2. Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes lorsque $x \to 0$:

(a) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}$
(b) $\tan(x)-\sin(x)$
(c) e^x+x-1
(d) $\ln(1+\sin(x))$
(e) $(\ln(1+x))^2-(\ln(1-x))^2$

III. Continuité

Exercice III.1. Étudier la continuité des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{|1+x|}-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^2\,\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-2x}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
4. $f : x \mapsto x\sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice III.2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x+4}-2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice III.3. Déterminer l'ensemble de définition et de continuité des fonctions suivantes, puis les éventuels prolongements par continuité :

1. $f : x \mapsto x^{x+1}$
2. $g : x \mapsto \dfrac{x\ln x}{x-1}$
3. $h : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}$
4. $j : x \mapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$

Exercice III.4. 1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution.

2. Montrer que tout polynôme de degré impair de $\mathbb{R}[X]$ a au moins une racine réelle.
3. Montrer que l'équation $x^3+5x-1=0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer ensuite que $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.
4. Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation $8x^7-7x-1=0$.

Exercice III.5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}+nx$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_n et dresser son tableau de variations.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution $u_n \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} < u_n < 0$. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice III.6. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \ln(x)+nx$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, f_n s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$ en un seul réel noté x_n.
2. (a) Pour $n \geq 1$, déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
   (b) En déduire la monotonie de la suite (x_n).
   (c) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.
3. Pour tout $n \geq 2$, on pose $y_n = nx_n$.
   (a) Étudier la limite de (y_n).
   (b) Montrer que $\lim \dfrac{\ln(y_n)}{y_n} = 0$.
   (c) Montrer que pour $n \geq 1$, $y_n + \ln(y_n) = \ln(n)$.
   (d) En déduire un équivalent de y_n, puis de x_n.

Exercice III.7 (Banque CCP-MP). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. (a) Démontrer que (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de x_0, le sens de variation de (u_n).

   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\arctan(x))$.

Exercice III.8. Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est k-lipschitzienne si : $\forall (x,y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$. On suppose que f est k-lipschitzienne.

1. Montrer que f est continue sur I.
2. On suppose maintenant que $I = [a,b]$ et $f : I \to I$ et que $k \in]0,1[$.
   (a) Montrer que f admet un unique point fixe ℓ sur I.
   (b) On définit la suite (u_n) par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

Exercice III.9.
1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ a une unique solution dans $[0,1]$ qu'on note x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) est décroissante.
3. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.
4. Déterminer un équivalent de (x_n).

Exercice III.10.
1. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.
2. Une voiture parcourt 90km en une heure. On admet que la distance $d(t)$ parcourue par la voiture en fonction du temps t est une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 30min durant lequel la voiture a parcouru exactement 45km.
   On pourra considérer la fonction $f(t) = d\left(t + \frac{1}{2}\right) - d(t)$.
3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x \in [0, 1-1/n]$, $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$.

Exercice III.11. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, qui ne s'annulent pas et qui vérifient : $\forall x \in I, f^2(x) = g^2(x)$.
Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice III.12.
1. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ telle que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) > 0$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq m$.
2. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ telles que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) > g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq g(x) + m$.

Exercice III.13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice III.14.
1. Montrer qu'une fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un contre-exemple si la fonction est seulement périodique, ou seulement continue.

Exercice III.15. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui admet des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice III.16. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global.

Exercice III.17. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$.
Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice III.18. On cherche les applications $f : [0,1] \to [0,1]$ continues et telles que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et pour tout $x \in [0,1], f \circ f(x) = x$.

1. Montrer qu'une telle application est injective. En déduire que f est strictement croissante.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que pour tout $x \in [0,1], f(x) = x$.

Exercice III.19. On souhaite montrer qu'il n'existe pas de fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'image de tout rationnel soit irrationnelle et que l'image de tout irrationnel soit rationnelle.
On raisonne pour cela par l'absurde et on suppose qu'il existe une telle fonction f.
En considérant la fonction $g(x) = f(x) + x$, aboutir à une contradiction.

Exercice III.20. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f, g \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$. On suppose que :

$$\forall x \in [a,b], \exists x' \in [a,b], f(x) = g(x').$$

On veut montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = g(c)$.
On raisonne par l'absurde et on suppose que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \neq g(x)$.

1. Montrer que la fonction $f - g$ est de signe constant et ne s'annule pas sur $[a, b]$.
2. On suppose que $f - g > 0$.
   (a) Montrer que f et g possède chacune un maximum sur $[a, b]$ notés respectivement M_f et M_g.
   (b) Montrer que $M_g \geq M_f$ puis conclure.
3. Traiter le cas $f - g < 0$.

Exercice III.21. 1. On cherche à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

On procède par analyse-synthèse.

   (a) Analyse : prenons f qui convient.
      i. Montrer que f est impaire.
      ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
      iii. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$.
      iv. En déduire que f est une fonction linéaire.
   (b) Synthèse : à vous de jouer.

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x)f(y)$.

Exercice III.22. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x + 1 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que f est bijective et discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice III.23. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. On suppose que I n'est pas réduit à un point.

1. Soit $a < b$ deux éléments de I. On suppose que $f(a) < f(b)$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in]a, b[$, $f(a) < f(x) < f(b)$.
   (b) En déduire que f est strictement croissante sur $[a, b]$.
   (c) Que peut-on dire de f si $f(a) > f(b)$?
2. Soit $a < b$ deux éléments de I. On suppose que $f(a) < f(b)$ et soit $x < y$ deux autres éléments de I. On pose $c = \min(a, x)$ et $d = \max(b, y)$.
   (a) Justifier que $c \leq a < b \leq d$ et en déduire que f est strictement croissante sur $[c, d]$.
   (b) En déduire que $f(x) < f(y)$.
3. Montrer que f est strictement monotone sur I.

Exercice III.24. 1. Démontrer le théorème de la limite monotone.

2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone. On suppose que $f(I)$ est un intervalle.
   Montrer que f est continue.

Indications - Solutions

Exercice I.1 :

1. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\alpha = \varepsilon^2 > 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq x \leq \alpha$, $0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{\alpha} = \varepsilon$.
2. Soit $B \in \mathbb{R}_+$. Posons $A = B^{\frac{1}{n}}$. Alors pour tout $x \geq A$, $x^n \geq A^n = B$.
3. Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Posons $\alpha = \dfrac{1}{A^{\frac{1}{n}}}$. Alors pour tout x tel que $0 < x \leq \alpha$, $\dfrac{1}{x^n} \geq \dfrac{1}{\alpha^n} = A$.

Exercice I.2 :

1. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{3}{2}$
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dfrac{na^n}{pa^p}$ (attention si $a = 0$ et $p > n$!)
3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \dfrac{11}{2}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{3}$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{4}$
8. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$
9. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 2\sqrt{a}$
10. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{4}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$
11. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$
12. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$
13. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\dfrac{1}{2}$
14. $f(n\pi) = (-1)^n n\pi$ qui ne converge pas.
15. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 1$
16. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$
17. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

Exercice I.3 : Si a est fini : il existe $\varepsilon > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, $|g(x)| \leq M$, donc $|(fg)(x)| \leq M|f(x)| \xrightarrow[x\to a]{} 0$. Donc $(fg)(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ par encadrement. Si $a = \pm\infty$, on procède de même mais en changeant le voisinage.

Exercice II.1 :

1. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{e^x} = e^{\sqrt{x}-x} = e^{x(-1+\frac{1}{\sqrt{x}})} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
2. Non : $x+1 \underset{+\infty}{\sim} x$, mais $e^{x+1} \underset{+\infty}{\not\sim} e^{x+1}$.

Exercice II.2 :

1. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)} \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$.
2. Comme $\arccos x \xrightarrow[x\to 1]{} 0$, $\sin(\arccos x) \underset{x\to 1}{\sim} \arccos x$.
3. $D_f = [-1/2, +\infty[$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-\dfrac{x}{x+1}} = \sqrt{\dfrac{2}{x+1}}$.

Exercice II.3 :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-1}{2x^2+1} = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+2x}{x^5-x^2+x} = 2$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x(2-x)\tan(2x)} = \dfrac{1}{8}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3} = 1$
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x \tan(2x) = -2$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} = \dfrac{a^2}{b^2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x} = 3$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x} = 0$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{x} = 2$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^{\sin x}-1} = 1$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x-2^x}{x} = \ln\dfrac{5}{2}$
12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$
13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x} = 1$
14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x + x^2} = 1$
15. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})} = 3$
16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x} = 2$
17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)(1-\cos x)}{x^3+x^4} = \dfrac{1}{2}$
18. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin((n+1)x)}{\sin x} = (-1)^n(n+1)$

Exercice II.4 :

1. (a) Lorsque $x \to +\infty$, $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} = x(\sqrt{1+1/x^2} + \sqrt{1-1/x^2})$. Or $\sqrt{1+1/x^2} + \sqrt{1-1/x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$, donc $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$.

   (b) La méthode précédente mène à un équivalent à 0 !! On utilise la quantité conjuguée : $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$.

2. (a) On utilise la quantité conjuguée : $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2} = \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2x^2}{2} = x^2$.

   On peut aussi utiliser $\sqrt{1+x^2} \underset{x\to 0\to 1}{=} +\dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

   (b) $\tan(x)-\sin(x) = \sin(x)\dfrac{1-\cos(x)}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} x\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{x^3}{3}$.

   (c) $\mathrm{e}^x - 1 + x \underset{x\to 0\to x}{=} +x + o(x) = 2x + o(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$.

   (d) $\ln(1+\sin(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

   (e) $(\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2 = (\ln(1+x)+\ln(1-x))(\ln(1+x)-\ln(1-x))$. Or $\ln(1+x)-\ln(1-x) \underset{x\to 0\to x}{=} +x+o(x) = 2x+o(x)$, et $\ln(1+x)+\ln(1-x) = \ln((1+x)(1-x)) = \ln(1-x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2$. Donc $(\ln(1+x))^2-(\ln(1-x))^2 \underset{x\to 0}{\sim} 2x\times(-x^2) = -2x^3$.

Exercice III.1 :

1. Sur $\mathbb{R}^*$, f est continue par opérations et composition de fonctions usuelles. $\lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, donc f est continue en 0.
3. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, donc f n'est pas continue en 0.
4. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice III.2 :

1. $D_f = [-4,0[\cup]0,+\infty[$.
2. f est continue par opérations et composition de fonctions continues.
3. $\lim_{x\to 0} f(x) = 8$, donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 8$.

Exercice III.3 :

1. $D_f = R_+^*$, continue sur D_f, prolongeable en 0 par $f(0) = 0$.
2. $D_g =]0,1[\cup]1,+\infty[$, continue sur D_g, prolongeable en 1 par $g(1) = 1$ et en 0 par $g(0) = 0$.
3. $D_h = \mathbb{R}^*$, continue sur D_h, prolongeable en 0 par $h(0) = 1$.
4. $D_j = \mathbb{R}^*$, continue sur $\mathbb{R}^* \setminus \{1/k, k\in\mathbb{Z}\}$, prolongeable en 0 par $j(0) = 1$.

Exercice III.4 :

1. Comme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, f prend au moins une valeur négative et une valeur positive. D'après le TVI, elle prend aussi la valeur 0.
2. Un polynôme de degré impair vérifie les hypothèse de la question précédente.
3. On pose $f(x) = x^3+5x-1$. $f'(x) = 3x^2+5 > 0$, donc f est injective. L'équation $f(x) = 0$ a donc au plus une équation, et d'après la question précédente elle en a une. $f(0) = -1 < 0$ et $f((1/2) = 13/8 > 0$, donc la solution est entre 0 et $1/2$.
4. On pose $f(x) = 8x^7-7x-1$. $f'(x) = 56x^6-7 = 0 \iff x = \pm(7/56)^{1/6}$. On vérifie ensuite que $f(-(7/56)^{1/6}) > 0$ et $f((7/56)^{1/6}) < 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc on a trois solutions réelles.

Exercice III.5 :

1. $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} + n = \dfrac{n\mathrm{e}^{2x}+(2n-1)\mathrm{e}^x+n}{1+\mathrm{e}^x} > 0$, donc $f_n(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = \pm\infty$.
2. Voir exercice III.4.
3. $f_n(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f_n(-1/n) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}} - 1 < 0$. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice III.6 :

1. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_n'(x) = \dfrac{1}{x} + n > 0$. Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ (par croissances comparées), d'après le TBM, l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. (a) Pour tout $n \geq 1$, $f_{n+1}(x_n) = \ln(x_n) + nx_n + x_n = x_n > 0$.

   (b) Soit $n\in\mathbb{N}$. Comme f_{n+1} est strictement croissante et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(x_n) > 0$, on a $x_n > x_{n+1}$: Donc (x_n) est strictement décroissante.

   (c) La suite est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers ℓ. Si $\ell \neq 0$, alors comme $0 = \ln(x_n) + nx_n \to +\infty$, donc on a une contradiction. D'où $\ell = 0$.
3. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $y_n = x_{n+1} - \ln(x_n) \to +\infty$.

   (b) $\lim \dfrac{\ln(y_n)}{y_n} = 0$ par croissances comparées.

   (c) Pour $n \geq 1$, $y_n + \ln(y_n) = nx_n + \ln(x_n) + \ln(n) = f_n(x_n) + \ln(n) = \ln(n)$.

   (d) En divisant par y_n : $1 + \dfrac{\ln(y_n)}{y_n} = \dfrac{\ln(n)}{y_n} \to 1$, donc $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Puis, $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Exercice III.7 :

1. (a) En étudiant la fonction $x \mapsto \arctan(x) - x$, on a $u_1 = \arctan(x_0) > u_0 = x_0$ ssi $x_0 < 0$. On montre alors par récurrence sur n que si $x_0 < 0$, alors (u_n) est décroissante et sinon elle est croissante. On utilise que la fonction arctan est croissante dans l'hérédité.

   (b) On montre facilement par récurrence que u_n est majorée par $\frac{\pi}{2}$ et minorée par $-\frac{\pi}{2}$. Comme la suite est monotone, elle converge vers ℓ qui vérifie $\arctan(\ell) = \ell \iff \ell = 0$.

2. On procède par analyse-synthèse. Si h est solution, alors on prend $x_0 \in \mathbb{R}$ et on définit comme avant la suite (u_n). On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h(x_0) = h(u_n)$. En prenant la limite, $h(x_0) = h(0)$. Autrement dit, h est constante. On vérifie ensuite que les fonctions constantes sont solutions du problème.

Exercice III.8 :

1. Soit $x \in I$. Pour tout $y \in I$, $|f(x) - f(y)| \le k|x - y|$. Or $|x - y| \xrightarrow[y \to x]{} 0$, donc par encadrement, $f(y) \xrightarrow[y \to x]{} f(x)$ et f est continue en x.

2. (a) On pose $g(x) = f(x) - x$, qui est continue sur $[a, b]$. Comme $g(a) \le 0$ et $g(b) \ge 0$, il existe $\ell \in [a, b]$ tel que $g(\ell) = 0$, donc ℓ est un point fixe de f. Supposons que $\ell' \in [a, b]$ vérifie $f(\ell') = \ell'$. Alors $|\ell - \ell'| = |f(\ell) - f(\ell')| \le k|\ell - \ell'|$. Comme $k < 1$, on a forcément $\ell = \ell'$. Donc le point fixe est unique.

   (b) On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \le k^n |u_0 - \ell|$. Comme $k \in]0, 1[$, $|u_n - \ell| \to 0$ et $u_n \to \ell$.

Exercice III.9 :

1. On pose $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$. C'est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1) \le 0$ pour $x \in [0, 1]$. Donc f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$, avec $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = -n + 1 < 0$ car $n \ge 2$. Donc $f_n(x) = 0$ a une unique solution dans $[0, 1]$ d'après le TVI strictement croissant.

2. Pour $n \ge 2$, $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - nx_n - x_n + 1 = x_n^{n+1} - 1 - x_n^n - x_n + 1 = x_n^{n+1} - x_n^n - x_n$. Comme $x_n \in [0, 1]$, $x_n^{n+1} \le x_n^n$, donc $f_n(x_n) < 0$. Comme f_n est strictement décroissante et $f_n(x_{n+1}) = 0$, on a $x_n > x_{n+1}$. La suite est décroissante.

3. (x_n) est décroissante et minorée, donc elle converge vers ℓ. Si $\ell \ne 0$, alors $0 = x_n^n - nx_n + 1 \to -\infty$, ce qui est une contradiction. Donc $\ell = 0$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nx_n = 1 + x_n^n \to 1$, donc $x_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice III.10 :

1. On pose $g(x) = f(x) - x$. C'est une fonction continue et $g(0) = f(0) \ge 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \le 0$. Puis on utilise le TVI.

2. $f(0) = d(1/2)$ et $f(1) = d(1) - d(1/2)$, donc $f(0) + f(1) = 90$. Ainsi, on a soit $f(0) \le 45$ et $f(1) \ge 45$ ou $f(0) \ge 45$ et $f(1) \le 45$. Dans les deux cas, on peut appliquer le TVI.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $g(x) = f(x + 1/n) - f(x)$ pour $x \in [0, 1 - 1/n]$. La fonction g est continue sur $[0, 1]$. De plus, $\sum_{k=1}^{n-1} g(k/n) = f(1) - f(0) = 0$ (télescopage). Donc il existe $k, \ell \in [\![1, n-1]\!]$ tels que $g(k) \ge 0$ et $g(\ell) \le 0$. Puis on applique le TVI.

Exercice III.11 : Comme f et g ne s'annulent pas et sont continues, elles ont toujours le même signe. Si f et g ont le même signe, $f = g$, sinon $f = -g$. Ou bien on raisonne par l'absurde.

Exercice III.12 :

1. f est minorée sur $[a, b]$. On prend m son minimum.

2. On applique la question précédente à $f(x) - g(x)$.

Exercice III.13 : Comme f est bornée sur $\mathbb{R}$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \le M$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(g(x)) \le M$ et $f \circ g$ est bornée. Comme g est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier, g est continue sur $[-M, M]$ et donc bornée sur ce segment. Il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in [-M, M]$, $|g(x)| \le N$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [-M, M]$, puis $|g(f(x))| \le M$ et $g \circ f$ est bornée.

Exercice III.14 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, périodique de période T. Alors $f_{|[0,T]}$ est une fonction continue sur un segment : elle est bornée. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0, T], |f(x)| \le M$. Puis, si $x \in \mathbb{R}$, on peut toujours trouver $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x + nT \in [0, T]$, donc $|f(x)| = |f(x + nT)| \le M$. La fonction est bornée sur $\mathbb{R}$.

2. Si la fonction est seulement continue, on peut prendre $x \mapsto x$ qui n'est pas bornée. Si elle est seulement périodique, on peut prendre f 1-périodique définie sur $]0, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice III.15 : $|f|$ admet aussi des limites finies en $\pm\infty$. Notons $\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = \ell_+$ et $\lim_{x \to -\infty} |f(x)| = -\infty$. Alors il existe $A < B$ tels que $\forall x \le A$, $|f(x)| \le \ell_- + 1$ et $\forall x \ge B, |f(x)| \le \ell_+ + 1$. Puis il existe M tel que $\forall x \in [A, B], |f(x)| \le M$. Ainsi, $|f|$ est majorée par $\max(M, \ell_+ + 1, \ell_- + 1)$.

Exercice III.16 : Posons $M = f(0)$. Il existe $A > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \ge A \Rightarrow f(x) \ge M$. Puis sur l'intervalle $[-A, A]$, la fonction f est minorée et atteint son minimum en x_0. Alors : $\forall x \in [-A, A], f(x) \ge f(x_0)$ et $\forall x \notin [-A, A], f(x) \ge M = f(0) \ge f(x_0)$.

Exercice III.17 : On commence par montrer par récurrence que $f(2^{-n}x) = f(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. $\lim_{n \to +\infty} f(2^{-n}x) = f(0)$ par continuité de f en 0. Mais aussi $\lim_{n \to +\infty} f(2^{-n}x) = \lim_{n \to +\infty} f(x) = f(x)$. Donc $f(x) = f(0)$.

Exercice III.18 :

1. Si $f(x) = f(x')$, alors $f(f(x)) = f(f(x'))$, donc $x = x'$. Il y a un théorème qui dit que si $g : I \to \mathbb{R}$ est continue et injective alors elle est strictement monotone, mais il n'est pas au programme!
   Prenons $0 \leq x < y < 1$. Comme f est injective, $0 \leq f(x) \neq f(y) \leq 1$. Supposons par l'absurde que $f(x) > f(y)$. Alors $f(y) \in [f(0), f(x)]$, donc il existe $c \in [0, x]$ tel que $f(c) = f(y)$. Or $y \notin [0, x]$, donc $y \neq c$, ce qui contredit l'injectivité de f ! Donc $f(x) < f(y)$ et f est strictement croissante.
2. Supposons que $f(x) \neq x$. Si $f(x) > x$, alors $f(f(x)) > f(x)$, donc $x > f(x)$, contradiction. De même si $f(x) < x$, on trouve $f(x) > x$.

Exercice III.19 : La fonction g est continue. De plus, si $x \in \mathbb{Q}$, alors $f(x) \notin \mathbb{Q}$, donc $g(x) \notin \mathbb{Q}$. Et si $x \notin \mathbb{Q}$, $f(g) \in \mathbb{Q}$, donc $g(x) \notin \mathbb{Q}$. Dans les deux cas, $g(x)$ est irrationnel. Supposons par l'absurde que g n'est pas constante, alors elle prend deux valeurs irrationnelles. Mais entre celles-ci il y a un rationnel. Par TVI, il existe alors une valeur de x pour laquelle $g(x) \in \mathbb{Q}$, ce qui est une contradiction. Ainsi g est constante, ce qui est une contradiction.

Exercice III.20 :

1. La fonction $f - g$ est continue sur $[a, b]$ et ne s'annule pas. D'après le TVI elle est donc soit toujours strictement positive, soit toujours strictement négative.
2. (a) C'est le TBM.
   (b) Comme M_f est le maximum de f, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = M_f$. Par hypothèse, il existe donc $x' \in [a, b]$ tel que $g(x') = M_f$. Mais $g(x') \leq M_g$, donc $M_f \leq M_g$.
   Prenons $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = M_g$. Alors $f(c) - g(c) > 0$, mais $f(c) - g(c) = f(c) - M_g \leq M_f - M_g \leq 0$, ce qui donne une contradiction.
3. On applique la question 2 à la fonction $g - f$.

Exercice III.21 :

1. (a) i. On prend $x = y = 0$ et on trouve $f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$. Puis on prend $y = -x$ et on trouve $f(x) + f(-x) = 0$.
   ii. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$. Puis on utilise l'imparité.
   iii. Si $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $qf(p/q) = f(q \times p/q) = f(p) = pf(1)$. Donc $f(p/q) = p/qf(1)$.
   iv. Si $x \in \mathbb{R}$, on prend une suite de rationnels (r_n) qui tend vers x. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(r_n) = r_n f(1)$ et à la limite, $f(x) = xf(1)$.
   (b) Si $f : x \mapsto ax$, alors f vérifie bien le problème donné.
2. On procède de nouveau par analyse-synthèse. Pour l'analyse, on voit que si f s'annule en x, alors f est nulle partout. On suppose que la fonction n'est pas la fonction nulle, donc f ne s'annule jamais. On commence par $f(0) = 1$ en prenant $x = y = 0$. Donc f est strictement positive. Puis, $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = f(x)^n$. Puis pour tout $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $f(p/q)^q = f(p) = f(1)^p$, donc $f(p/q) = f(1)^{p/q}$ car f est strictement positive. Pour $x \in \mathbb{R}$, on prend une suite de rationnels (r_n) avec $r_n \to x$. Alors $f(r_n) = f(1)^{r_n}$ et à la limite : $f(x) = f(1)^x$. Donc f est une exponentielle. On vérifie ensuite que la fonction nulle convient et si $a > 0$, $f(x) = a^x$ convient aussi.

Exercice III.22 :

- Injectivité : soit $x, x' \in \mathbb{R}$ avec $x \neq x'$. Si $x, x' \in \mathbb{Q}$, alors $f(x) = x - 1 \neq x' - 1 = f(x')$. Si $x, x' \notin \mathbb{Q}$, alors $f(x) = x + 1 \neq x' + 1 = f(x')$. Si $x \in \mathbb{Q}$ et $x' \notin \mathbb{Q}$, alors $f(x) = x - 1 \in \mathbb{Q}$ et $f(x') = x' + 1 \notin \mathbb{Q}$. Donc $f(x) \neq f(x')$. Le dernier cas se traite de même. Donc f est bien injective.
- Surectivité : soit $y \in \mathbb{R}$. Si $y \in \mathbb{Q}$, alors $y + 1 \in \mathbb{Q}$ et $f(y + 1) = y$. Si $y \notin \mathbb{Q}$, alors $y - 1 \notin \mathbb{Q}$ et $f(y - 1) = y$. Dans les deux cas, y admet un antécédent, donc f est surjective.
- Continuité : Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $x \in \mathbb{Q}$. Alors il existe (x_n) une suite d'irrationnels tels que $x_n \to x$. Donc $f(x_n) = x_n + 1 \to x + 1 \neq f(x)$ et f n'est pas continue en x. De même si $x \notin \mathbb{Q}$.

Exercice III.23 :

1. (a) Soit $x \in]a, b[$. Supposons par l'absurde que $f(x) \notin]f(a), f(b)[$. On a soit $f(x) < f(a)$, mais alors $f(a) \in [f(x), f(b)]$ et il existe $y \in [x, b]$ tel que $f(a) = f(y)$ ce qui contredit l'injectivité, soit $f(x) > f(b)$ et $f(b) \in [f(a), f(x)]$ et il existe $y \in [a, x]$ tel que $f(y) = f(b)$ ce qui est aussi en contradiction avec l'injectivité de f.
   (b) Soit $x < y$ dans $[a, b]$. D'après la question précédente, $f(x) < f(b)$. En réappliquant la question précédente sur $[x, b]$ avec $y \in]x, b[$, on a $f(x) < f(y) < f(b)$. Donc f est bien strictement croissante sur $[a, b]$.
   (c) On peut prendre $g = -f$ qui est encore continue et injective. Elle vérifie $g(a) < g(b)$, donc est strictement croissante sur $[a, b]$. Puis f est strictement décroissante sur $[a, b]$.
2. (a) $c = \min(a, x) \leq a$ et $b \leq \max(b, y)$ par définition. Comme $a < b$, $c \leq a < b \leq d$. Comme f est injective, on a soit $f(c) < f(d)$, soit $f(c) > f(d)$. Dans le deuxième cas, f est strictement décroissante sur $[c, d]$, et $f(a) > f(b)$ ce qui est une contradiction. Donc $f(c) < f(d)$ puis f est strictement croissante sur $[c, d]$.
   (b) Comme $x, y \in [c, d]$, $f(x) < f(y)$.
3. Soit $a < b$ deux éléments de I.
   - Si $f(a) < f(b)$, alors d'après la question précédente, pour tout $x < y$ dans I, $f(x) < f(y)$, donc f est strictement croissante sur I.
   - Si $f(a) > f(b)$, alors $-f(a) < -f(b)$ et d'après la question précédente, pour tout $x < y$ dans I, $-f(x) < -f(y)$, donc f est strictement décroissante sur I.

Correction de l'exercice III.24 :

1. On considère le cas où f est croissante. On prend $c \in I$ qui n'est pas sur le bord de I. L'ensemble $E = \{f(x),\text{ avec } x < c\}$ est non vide et majoré par $f(c)$. Il admet une borne supérieure qu'on note M. Montrons que $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x) = M$.

   Soit $\varepsilon > 0$. Alors $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E. Il existe $x_0 < c$ tel que $f(x) > M - \varepsilon$. On pose $\alpha = c - x_0 > 0$. Comme f est croissante, $\forall x \in I$, si $x_0 \leq x < c$, $f(x_0) \leq f(x) \leq M$. Autrement dit, $\forall x \in I$, $|c - x| \leq \alpha$ et $x < c \Rightarrow M - \varepsilon \leq f(x) \leq M$. Donc f tend vers M lorsque x tend vers c par valeurs inférieures. Comme $\forall x < c$, $f(x) \leq f(c)$, en passant à la limite, $M \leq f(c)$.
   On adapte pour la limite à droite, et pour les bornes de I.
   Pour le cas f décroissante, on considère $-f$ qui est croissante.

2. Soit $c \in I$ qui n'est pas une borne de I. Montrons que f est continue en c. Comme f est monotone, elle admet une limite à gauche ℓ_- et à droite ℓ_+ en c. Supposons par exemple que f est croissante, alors $\ell_- \leq f(c) \leq \ell_+$. Il nous suffit de prouver que $\ell_+ = f(c) = \ell_-$.
   Supposons par l'absurde que $\ell_- < f(c)$. Comme c n'est pas une borne, il existe $a < c$ dans I. Comme f est croissante, $f(a) \leq \ell_- < f(c)$. Comme $f(I)$ est un intervalle $\ell_- \in [f(a), f(c)] \subset f(I)$. En particulier, $\dfrac{f(c) + \ell_-}{2}$ est dans $f(I)$: il existe $d \in I$ tel que $\ell_- < f(d) = \dfrac{f(c) + \ell_-}{2} < f(c)$. Comme f est croissante, $d < c$. Mais alors $d \leq \ell_-$, ce qui est absurde. On raisonne de même pour ℓ_+.