

Colles 17 - 10/02/2025 au 14/02/2025

Thèmes traités en classe

- Chapitre 16 : Continuité.
Exercices traités en classe : I.3, II.3, III.1, III.2, III.3, III.4, III.5, III.7, III.11, III.13, III.14, III.15, III.16.
- Chapitre 17 : Dérivabilité.
 1. Dérivée en un point, dérivée à gauche, dérivée à droite, tangente.
 2. Développement limité à l'ordre 1.
 3. Opérations sur les dérivées, dérivée de la réciproque.
 4. Extrema locaux, points critiques.
 5. Rolle, TAF, IAF.
 6. Caractérisation de la monotonie et de la stricte monotonie.
 7. Limite de la dérivée.
 8. Fonctions lipschitziennes.

Exercices traités en classe : I.1, I.2, I.3, I.4, II.1, II.2, II.6, II.10, IV.1.

Questions de cours

Question 1

- Application du TVI : soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.
- Application du TVI : soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré 3. Montrer que f s'annule au moins une fois sur \mathbb{R} .
- Donner les équivalents usuels et en démontrer quelques-uns.
- Énoncer le TVI, TBA et TBM. Expliquer le principe de la dichotomie pour la démonstration du TVI. Pour les plus motivés : faire la démonstration complète du TVI.
- C16 Exercice III.14 : Montrer qu'une fonction périodique et continue sur \mathbb{R} est bornée sur \mathbb{R} . Donner un contre-exemple si la fonction est seulement périodique, puis si elle est seulement continue.
- Théorème de Rolle : énoncé et démonstration.
- Théorème des accroissements finis : énoncé et démonstration.
- Exemple du cours : Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* , prolongeable par continuité en 0, dérivable en 0, mais pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
 - ▷ Caractérisation séquentielle de la limite.
 - ▷ Limite finie et bornétude.
 - ▷ Passage à la limite dans les inégalités.
 - ▷ Théorème d'encadrement.
 - ▷ Théorème de la limite monotone.
 - ▷ Croissances comparées et o .
 - ▷ Théorème des bornes atteintes.
 - ▷ Théorème des valeurs intermédiaires.
 - ▷ Corollaires du TVI : image d'un intervalle.
 - ▷ Théorème de la bijection monotone.
 - ▷ Dérivabilité et développement limité à l'ordre 1.

- ▷ Extremum local et dérivée.
- ▷ Théorème de Rolle.
- ▷ Théorème des accroissements finis.
- ▷ Monotonie et dérivée.
- ▷ Limite de la dérivée.
- ▷ Inégalité des accroissements finis.

A savoir faire

1. Savoir déterminer une limite avec un encadrement.
2. Savoir manipuler les équivalents et les o .
3. Savoir justifier qu'une fonction est continue sur un intervalle/en un point.
4. Savoir vérifier si une fonction est prolongeable par continuité en un point.
5. Savoir appliquer le TVI, TBA et TBM en vérifiant précisément les hypothèses.
6. Savoir prouver la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle/en un point.
7. Savoir appliquer Rolle, le TAF et l'IAF.