Chapitre 17 : Dérivabilité

Dans tout le chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

I. Dérivation

I.1. Dérivabilité en un point

Définition I.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \neq x \in I$.

- Le **taux d'accroissement** de f entre a et x est la quantité
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a)-f(x)}{a-x}$$
- On dit que f est **dérivable** en a si le taux d'accroissement admet une limite finie lorsque x tend vers a. Cette limite est appelée **nombre dérivé de f en** a et est notée $f'(a)$:
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Remarques I.1.

- Si $d(t)$ est la distance parcourue par un mobile en fonction du temps, alors $d'(t_0)$ est la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0.
- Dans la définition, on passe d'une limite à l'autre en posant $x = a+h$: lorsque $h \to 0$, on a bien $x \to a$.
- La taux d'accroissement de f entre a et x est le rapport entre l'accroissement des ordonnées Δy et des abscisses Δx. C'est la pente de la droite qui passe par les deux points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ de la courbe $\mathscr{C}_f$.
- Le nombre dérivé, lorsqu'il existe, est la limite des coefficients directeurs des droites précédentes lorsque x tend vers a : $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx}$ qui est la notation de Leibniz.

Définition I.2. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a, la **droite tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse** a est la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
C'est la droite de pente $f'(a)$ qui passe par le point $(a, f(a)) \in \mathscr{C}_f$.

Remarque I.2. La droite tangente est la droite « limite » des sécantes à la courbe. Lorsque cette droite limite est verticale, la fonction n'est pas dérivable et la limite des taux d'accroissement vaut $\pm\infty$.

Comme le montre la proposition suivante, la droite tangente et la courbe $\mathscr{C}_f$ se « confondent » au voisinage de a.

Proposition I.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors f est dérivable en a ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :*
$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \lambda(x-a) + o(x-a).$$
*De plus, si f est dérivable, $\lambda = f'(a)$ et on dit que f admet un **développement limité à l'ordre** 1 **en** a.*

Proposition I.2. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a, alors elle est continue en a.*

Remarque I.3. Attention : la réciproque est fausse. En effet, la fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

Définition I.3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ à l'intérieur de I. On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en a. On note alors $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$) la dérivée à droite (resp. à gauche) en a.

> **Proposition I.3.** *La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.*

Remarque I.4. Lorsque f est dérivable à gauche et à droite en a, $\mathscr{C}_f$ admet deux « demi-tangentes » au point d'abscisse a. Si les valeurs des dérivées ne coïncident pas, alors la courbe a un point anguleux.

> **Définition I.4.** On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f, et se note f', ou encore $\dfrac{df}{dx}$.

I.2. Opérations sur les dérivées

> **Proposition I.4 (Linéarité de la dérivée).** *Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors la combinaison linéaire $\lambda u + \mu v$ est dérivable en a et $(\lambda u + \mu v)'(a) = \lambda u'(a) + \mu v'(a)$.*

> **Proposition I.5.** *Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ dérivables en a. Alors :*
> - *la fonction uv est dérivable en a et $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$;*
> - *si $u(a) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{u}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{1}{u}\right)'(a) = -\dfrac{u'(a)}{u^2(a)}$;*
> - *si $v(a) \neq 0$ alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(a) = \dfrac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v^2(a)}$.*

I.3. Dérivée des fonctions composées

> **Proposition I.6.** *Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et*
> $$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a)).$$

Remarque I.5. En utilisant la notation de Leibniz : $y = f(x)$ et $z = g(y)$, on obtient $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, $g'(y) = \dfrac{dz}{dy}$ et $(g \circ f)'(x) = \dfrac{dz}{dx}$, donc $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \times \dfrac{dy}{dx}$.

I.4. Dérivée des réciproques

Soit $f : I \to J$ une fonction continue et bijective. Soit $g : J \to I$ sa bijection réciproque. Prenons $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$.

> **Proposition I.7.** *Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors g est dérivable en y_0 et $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.*
> *De plus, la tangente à $\mathscr{C}_g$ en y_0 est symétrique à la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0.*

Remarque I.6. On peut aussi écrire $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

II. Théorèmes fondamentaux

II.1. Extrema d'une fonction

> **Définition II.1.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction f admet :
> - un maximum local en a si : $\exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq f(a)$;
> - un minimum local en a si : $\exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq f(a)$.

Proposition II.1. *Soit a* ***à l'intérieur*** *de I. Si f est dérivable en a et admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.*

Définition II.2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$. On dit que a est un **point critique** de f si $f'(a) = 0$.

Remarques II.1.
- Attention, la réciproque est fausse : la fonction $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un extremum local.
- Si a est une borne de I, on n'a pas forcément $f'(a) = 0$. Par exemple, $f(x) = x$ définie sur $[0,1]$ admet un maximum local en 1, mais $f'(1) = 1 \neq 0$.
- Si f est continue et dérivable sur $I = [a, b]$, alors on sait qu'elle est bornée et atteint ses bornes. Pour déterminer $\sup_{[a,b]} f$ et $\inf_{[a,b]} f$, il suffit de comparer les valeurs de f aux points où f' s'annule et en a et en b.

II.2. Théorème de Rolle

Théorème II.2 (Théorème de Rolle)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

II.3. Théorème des accroissements finis

Théorème II.3 (Théorème des accroissements finis)

Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Remarque II.2. Le théorème affirme qu'il existe une tangente à $\mathscr{C}_f$ qui est parallèle à la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Cette droite a pour équation $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$.
Le théorème de Rolle est un cas particulier du TAF car la droite est horizontale.

Théorème II.4

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
1. *f est croissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$.*
2. *f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \leq 0$.*
3. *f est constante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) = 0$.*

Remarque II.3. En particulier, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Proposition II.5 (Caractérisation de la stricte monotonie). *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction f est strictement croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ et l'ensemble $\{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ ne contient pas d'intervalle non trivial.*

Remarque II.4. En général, on utilise que si f' est strictement positive (resp. négative) sur I sauf en un nombre fini de points de I alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

Théorème II.6 (Limite de la dérivée)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. S'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\lim_{x\to a} f'(x) = \ell$, alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.
Si de plus, ℓ est un réel, alors f est dérivable sur I, $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a.
Si $\ell = \pm\infty$, alors $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en a.

Remarque II.5.
- Si f est de plus $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est $\mathscr{C}^1$ sur I.
- Attention, f peut être continue et dérivable sur I, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ sans être de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Par exemple $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ avec $f(0) = 0$.

II.4. Inégalité des accroissements finis

Corollaire II.7 (Inégalité des accroissements finis). *Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*

1. *S'il existe m et M tels que pour tout $x \in]a,b[$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$.*
2. *S'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leq M$ alors $|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$.*

Définition II.3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $K \geq 0$. On dit que f est K-lipschitzienne sur I si :

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x)-f(y)| \leq K|x-y|.$$

Remarque II.6. Soit $f : I \to I$ une fonction K-lipschitzienne. On suppose que $K \in [0,1[$ et $\ell \in I$ est un point fixe de f. Si on considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$, alors pour tout $n \geq 0$,

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq K|u_n - \ell|.$$

Par récurrence, on trouve $|u_n - \ell| \leq K^n |u_0 - \ell|$. Comme $K \in [0,1[$, on a donc $u_n \to \ell$.

Proposition II.8. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f est K-lipschitzienne sur I, alors f est continue sur I.*
2. *Si f est dérivable sur I et f' est bornée sur I par une constante $M \geq 0$, alors f est M-lipschitzienne sur I.*

Remarque II.7. Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ est lipschitzienne car sa dérivée est continue sur un segment donc bornée.

III. Dérivées successives

III.1. $\mathscr{C}^n$

Définition III.1. Soit f une fonction définie sur I.

- Si f est dérivable sur I, on note f' sa dérivée.
- Si f' est dérivable sur I, on note f'' sa dérivée. C'est la **dérivée seconde** de f.
- Par récurrence, on définit la **dérivée n-ième** de f notée $f^{(n)}$ ou encore $\frac{d^n f}{dx^n}$: si $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ existent sur I et $f^{(n-1)}$ est dérivable, alors $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

On dit que f est **de classe** $\mathscr{C}^n$ sur l'intervalle I si f admet une dérivée n-ième qui est en plus continue. On note $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. C'est un sous-ensemble de $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$.

Remarque III.1. Attention, une dérivée n'est pas forcément continue. Par exemple $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ prolongée en 0 par $f(0) = 0$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée n'est pas continue.

Définition III.2. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemples III.1. Les fonctions polynomiales, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \tan x$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.

Proposition III.1. *Une combinaison linéaire, un produit, un quotient bien défini, une composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ est de classe $\mathscr{C}^n$. De plus, si $f, g \in \mathscr{C}^n(I)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,*

1. $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
2. $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$
3. $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ *(formule de Leibniz).*

Remarque III.2. Il n'y a pas de formule pour la dérivée n-ième d'une composée.

III.2. Régularité de la réciproque

Proposition III.2. *Soit $f : I \to J$ une fonction continue et bijective. Si f est $\mathscr{C}^n$ et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est $\mathscr{C}^n$ sur J.*

IV. Fonctions à valeurs complexes

Définition IV.1. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. On note alors cette limite $f'(a) \in \mathbb{C}$.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.

Proposition IV.1. *Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Alors f est dérivable sur I ssi $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables sur I.*
On a alors : $(\mathrm{Re}(f))' = \mathrm{Re}(f')$ *et* $(\mathrm{Im}(f))' = \mathrm{Im}(f')$.

Remarque IV.1. Les propositions sur les sommes, produits, quotients de dérivées restent vraies pour les fonctions à valeurs complexes.
Le théorème de Rolle ne s'étend pas au cas des fonctions à valeurs complexes.

Proposition IV.2. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $|f'|$ est majorée par un réel M, alors f est M-lipschitzienne sur $[a, b]$.*

V. Fonctions convexes

Lemme V.1. *Soit $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \leq y$. Alors $[x, y] = \left\{tx + (1-t)y, t \in [0,1]\right\}$.*

Définition V.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est **convexe** sur I si :
$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0,1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$
- On dit que f est **concave** sur I si :
$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0,1], \quad f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Remarque V.1. f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.

Proposition V.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $x, y \in I$ avec $x < y$. Le graphe de f est situé en-dessous de sa sécante sur l'intervalle $[x, y]$ et au-dessus à l'extérieur.*
Si de plus f est dérivable, alors le graphe de f est au-dessus de ses tangentes.

Théorème V.2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.

$$f \text{ est convexe sur } I \iff \forall x \in I, f''(x) \geq 0.$$

Exemples V.1.

1. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée seconde est positive. Son graphe est donc au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, qui a pour équation $y = x + 1$. Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geq x + 1$.
2. La fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car sa dérivée seconde est négative. Son graphe est au-dessous de sa tangente au point d'abscisse 1. Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$.