

Polynômes

Prérequis

Opérations sur les polynômes. Division euclidienne. Évaluation. Racines.

Autour de la division euclidienne

Calcul 24.1 — Pour s'échauffer.



Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le quotient Q et le reste R de la division euclidienne de A par B :

a) $A = X^3 + X^2 - X + 1$, $B = X - 1$

b) $A = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 1$, $B = X^2 + X + 1$

c) $A = X^5 + X^4 - X^3 + X - 1$, $B = X^3 + X^2 + 2$

d) $A = 26X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1$, $B = 2X^3 - X^2 - X + 1$

Calcul 24.2 — Avec des degrés arbitraires.



La lettre n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le reste R de la division euclidienne de A par B :

a) $A = X^n$, $B = X - 1$

b) $A = X^{3n+2} + X^{3n+1} + X^{3n}$, $B = X^2 + X + 1$

c) $A = (X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2$, $B = (X - 2)^2$

d) $A = X^{n+2} + X^{n+1} - X^n$, $B = X^3 - 2X + 1$

Calcul 24.3 — Avec des opérations.



Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le reste R de la division euclidienne de P par X^4 :

a) $P = A + B$ où $A = X^5 + X - 2$ et $B = X^4 + X - 1$

b) $P = A \times B$ où $A = 2X^3 - 3X^2 - X + 1$ et $B = X^2 + X + 1$

c) $P = A \circ B$ où $A = X^2 - 3X + 1$ et $B = (X - 2)^2$

d) $P = A \circ B$ où $A = 2X^3 - 3X^2 - X + 1$ et $B = X^3 + X^2 - 2X + 1$

Calcul 24.4 — Pour évaluer en un point.



Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.

a) Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$

b) Calculer $P(i)$

Calcul 24.5 — Pour évaluer en un point — bis.



Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.

a) Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 2$

b) Calculer $P(\sqrt{2})$

Calcul 24.6 — Pour évaluer en un point — ter.



Soit $P = X^6 - 2X^5 - 8X^4 - 22X^3 - 53X^2 - 56X - 20$.

En vous inspirant des deux exercices précédents, calculer :

a) $P(\sqrt{2} - 1)$

b) $P(i + 1)$

Calcul 24.7 — Pour factoriser.



Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes ci-dessous, connaissant certaines racines :

a) $P = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - X + 1$ où 1 est racine multiple.

b) $P = X^4 - 4X^3 + 11X^2 - 14X + 10$ où $1 + i$ est racine.

c) $P = X^6 - 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 3X - 2$ où 1 est racine multiple et i est racine.

Décomposition en éléments simples

Prérequis

Polynômes (factorisation, division euclidienne), primitives usuelles

Calculs de décompositions en éléments simples

Calcul 25.1 — Uniquement des pôles simples.



Effectuer la décomposition en éléments simples (sur \mathbb{C}) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\frac{X^4 - 2}{X(X + 1)(X + 2)}$

b) $\frac{X^3 + 2}{(X - 1)X(X + 1)}$

c) $\frac{X^2}{(X - \pi)(X + \pi)}$

Calcul 25.2



Même exercice.

a) $\frac{X + 1}{(X + 2)(X + e)}$

b) $\frac{X^2 + X + 1}{(X - i)(X + i)(X - 1)}$

c) $\frac{X^2 + 2}{(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{3})}$

Calcul 25.3 — Avec des pôles multiples.



Effectuer la décomposition en éléments simples (sur \mathbb{C}) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\frac{X + 1}{(X - 1)^2(X - 2)(X - 3)}$

b) $\frac{2 + X^2}{(X + 1)X^2(X - 1)^2}$

c) $\frac{1 - X}{X(X + \pi)^2}$

d) $\frac{1}{(X - i)^2(X - 1 - i)^2}$

Calcul 25.4 — À vous de factoriser.



Effectuer la décomposition en éléments simples (sur \mathbb{C}) des fractions rationnelles suivantes.

a) $\frac{X-3}{X^4-1}$

b) $\frac{2X^3+1}{X^4-3X^2+2X}$

Calcul 25.5 — Calculs de sommes.



Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

Calculer les sommes suivantes, après avoir fait une décomposition en éléments simples de leur terme général.

a) $\sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$

b) $\sum_{k=2}^n \frac{k^2-5k-2}{(k-1)k(k+1)(k+2)}$

Calcul 25.6 — Calculs de sommes.



Effectuer la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} des fractions rationnelles suivantes.

a) $\frac{2X+4}{(X+1)^2(X^2+1)}$

b) $\frac{3}{(X-1)(X+1)(X^2+X+1)}$

Calcul d'intégrales de fractions rationnelles

Calcul 25.7 — Pôles simples ou multiples.



Calculer les intégrales suivantes

a) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} dx$

d) $\int_1^2 \frac{x}{(2x+1)(x+2)^2} dx$

b) $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-2)} dx$

e) $\int_0^{1/2} \frac{1}{4x^2+1} dx$

c) $\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2} dx$

f) $\int_2^3 \frac{x}{x^4-1} dx$

Calcul 25.8 — Primitives.



Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$

b) $x \mapsto \frac{1}{(1 - 2x)^3}$

c) $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2}$

d) $x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}$

e) $x \mapsto \frac{x}{x^2 + 2x + 3}$

f) $x \mapsto \frac{x^4}{(x - 1)(x - 2)(x + 1)}$

g) $x \mapsto \frac{x}{(x^2 + 2)(x + 1)}$

h) $x \mapsto \frac{x - 2}{(x + 1)^2(x - 1)^2}$