Polynômes - Exercices

I. Généralités

Exercice I.1. On donne le polynôme $P=(X^2-1)^{2n}$.

1. Donner le coefficient du monôme de degré $2n$ de P.
2. Si $A=a_0+a_1X+\cdots+a_pX^p$ et $B=b_0+b_1X+\cdots+b_pX^p$, quel est le coefficient du monôme de degré p de de $A\times B$?
3. On pose $A=(X-1)^{2n}$ et $B=(X+1)^{2n}$. En remarquant que $P=A\times B$, en déduire un autre calcul du coefficient du monôme de degré $2n$ de P.
4. Déduire des questions précédentes la relation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}$.

Exercice I.2. Soit $P_n(X)=(1+X)(1+X^2)(1+X^4)\cdots(1+X^{2^n})$. Calculer les coefficients de P_n.

Exercice I.3.

1. On souhaite résoudre l'équation $P(X^2)=(X^2+1)P(X)$, d'inconnue $P\in\mathbb{R}[X]$.
   (a) Soit P une solution et n son degré. Calculer n.
   (b) En déduire les solutions de l'équation.
2. En procédant de la même façon, déterminer les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ tels que $P\circ P=P$.

II. Division euclidienne

Exercice II.1. Dans chaque cas, effectuer la division euclidienne de A par B :

1. $A=X^3+2X^2+X-1$ et $B=X-2$
2. $A=X^4+X^3-X+5$ et $B=X^2+1$
3. $A=X^4+X^3+X^2+X+1$ et $B=X^3+X^2$
4. $A=X^4+2X^3+4X^2+2$ et $B=X^2+(1-i)X+1+i$.

Exercice II.2.

1. Déterminer a et b pour que X^2-aX+1 divise X^4-X+b.
2. Déterminer $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ pour que X^2+1 divise $X^4+X^3+\lambda X^2+\mu X+2$.

Exercice II.3.

1. Montrer que $(X+1)^{2n}-X^{2n}-2X-1$ est divisible par $X(X+1)(2X+1)$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$ par X^2-1.
3. On pose $P=X^{n+1}-2X^n+X+1$ et $B=(X-1)(X-2)$.
   (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de P par B.
   (b) Déterminer le quotient de cette division euclidienne.

Exercice II.4. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$.

1. On suppose que le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)$ est 6, et que le reste de la division de P par $(X-2)$ est 8. Quel est le reste de la division par $(X-1)(X-2)$?
2. *Généralisation.* Si $a\neq b$, donner le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice II.5. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos\theta+X\sin\theta)^n$ par X^2+1.

III. Racines

Exercice III.1.

1. Montrer très simplement que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$.
2. Déterminer le quotient de la division euclidienne de $(X+1)^n - nX - 1$ par X^2.

Exercice III.2. On considère le polynôme $P = X^6 - X^5 - 2X^4 - X^3 + X^2 + 2X - 1$. On souhaite calculer $P(1+\sqrt{2})$.

1. Déterminer un polynôme à coefficients entiers dont $1+\sqrt{2}$ est racine.
2. En déduire une manière simple de calculer $P(1+\sqrt{2})$.

Exercice III.3. Démontrer que les polynômes suivants n'ont que des racines simples dans $\mathbb{C}$:

a) $1 + \dfrac{X}{1!} + \dfrac{X^2}{2!} + \cdots + \dfrac{X^n}{n!}$ b) $1 - X + X^n$ (avec $n \geq 2$)

Exercice III.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $P = (X-2)^n - (2X-3)^n + \lambda(X^n - 1)$.
Trouver l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels P admet 1 comme racine au moins double. Déterminer alors l'ordre de multiplicité de cette racine.

Exercice III.5. Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $M^2 - 3M + 2I_2 = 0_2$.
2. Soit $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. Calculer M^n pour tout $n > 0$.

Exercice III.6. Soient a, b et c trois réels deux à deux distincts. Montrer, sans développer, que le polynôme

$$P = (b-c)(X-a)^2 + (c-a)(X-b)^2 + (a-b)(X-c)^2 + (a-b)(b-c)(c-a)$$

est le polynôme nul.

Exercice III.7.

1. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(X) = Q(X+1)$.
   (a) Si α est une racine de Q, que dire de $\alpha + 1$?
   (b) En déduire que Q est constant.
2. On souhaite déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.
   (a) Soit P un tel polynôme. Montrer que 0 est racine de P.
   (b) En déduire trois autres racines de P.
   (c) Montrer que P peut s'écrire $P = \lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exercice III.8.

1. Soit $P = (X-2)(X-1)(X+1)(X+2)$. Montrer que P' a trois racines distinctes qui sont toutes réelles.
2. Soit P un polynôme de degré $n \geq 2$ ayant n racines réelles distinctes $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ dans un intervalle $]a, b[$.
   (a) Montrer que P' a $n-1$ racines réelles distinctes dans l'intervalle $]a, b[$.
   (b) Montrer par l'absurde que P ne peut pas avoir deux coefficients consécutifs nuls.
3. On suppose maintenant que P a k racines réelles distinctes $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ de multiplicités $m_1, m_2, \ldots m_k$.
   Montrer que P' a au moins $m_1 + m_2 + \ldots + m_k - 1$ racines réelles comptées avec multiplicités.
4. Soient p et q deux réels. On pose $P = X^6 + pX + q$ et $Q = X^5 + pX + q$.
   Montrer que P ne peut pas avoir plus de deux racines réelles distinctes et Q ne peut pas avoir plus de trois racines réelles distinctes.
5. Montrer que le polynôme $P = \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$ est de degré n et a n racines réelles distinctes strictement comprises entre -1 et 1.

IV. Factorisations

Exercice IV.1.

1. Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Factoriser $X^3 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$. En déduire la relation (à retenir) : $1 + j + j^2 = 0$.
2. Soit $n \geq 2$ et $\xi = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
   (a) Utiliser une méthode semblable à celle de la question 1 pour montrer que :
   $$1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{n-1} = 0$$
   (b) Montrer aussi que $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \xi^k) = n$.
   (c) Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, calculer $|1 - \xi^k|$.
   (d) En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.
3. Soit $n \geq 0$. Factoriser le polynôme $X^{2n+1} - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis en déduire que $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.

Exercice IV.2. Factoriser en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^5 - 1$
2. $X^6 + 1$
3. $(X^2 - X + 2)^2 + (X - 2)^2$
4. $X^3 - 2X^2 + 2X - 1$
5. $X^3 - X^2 - 8X + 12$
6. $X^6 - X^3 + 1$.

Exercice IV.3. Soit $P = X^8 + 9X^7 + 23X^6 + 27X^5 + 63X^4 + 27X^3 + 61X^2 + 9X + 20$. Vérifier que i est racine de P, puis factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice IV.4. Soit $P = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$. Sachant que la somme de deux des racines de P est égale à la troisième, factoriser P.

Exercice IV.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0, \pi[$. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 2\cos(\alpha)X^n + 1$.

Exercice IV.6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$.

Exercice IV.7. Soit $P = X^3 - X + 1$.

1. Justifier que P a trois racines simples que l'on notera a, b et c.
2. Déterminer la valeur de $ab + ac + bc$.
3. Calculer $a^2 + b^2 + c^2$.
4. En déduire $a^7 + b^7 + c^7$.

Exercice IV.8. [Polynômes de Tchebychev]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos x) = \cos(nx)$$
2. Factoriser $\cos(nx) + \cos((n-2)x)$ et en déduire une relation entre T_n, T_{n-1} et T_{n-2}.
3. Calculer T_0, T_1, T_2 et T_3.
4. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.
5. Trouver les racines de T_n qui sont dans $[-1, 1]$.
6. Factoriser T_n.
7. Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

V. Décompositions en éléments simples

Exercice V.1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire scindé à racines simples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Exprimer $P'(\alpha_k)$ en fonction des autres racines de P.
2. En déduire l'expression des coefficients de la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P}$ à l'aide de P'.

Exercice V.2. 1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

(a) $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

(b) $\dfrac{2X^5-11X^4+13X^3+17X^2-39X-18}{X^3-6X^2+11X-6}$

(c) $\dfrac{n!}{X(X+1)(X+2)\cdots(X+n)}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles suivantes :

(a) $\dfrac{1}{X(X^2+1)}$ | (b) $\dfrac{1}{X(X^n-1)}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

3. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^4+2X^3+X^2-X-3}{X^3+X^2-X-1}$ sous la forme $P + \dfrac{\alpha}{X-1} + \dfrac{\beta}{X+1} + \dfrac{\gamma}{(X+1)^2}$.
4. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X(X^2+1)}$ sous la forme $P + \dfrac{\alpha}{X} + \dfrac{\beta X + \gamma}{X^2+1}$.

Exercice V.3. 1. Soit $n \geq 2$ un entier. Simplifier les sommes :

(a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$ | (b) $R_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k^3-k+1}{k^3-k}$ | (c) $T_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{(k^2-1)(k^2-4)}$.

2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-2x+x-4}{x^2-x-2}\mathrm{d}x$.

Exercice V.4. 1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant, scindé à racines simples. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

2. Soit $n \geq 2$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{\substack{\omega \in \mathbb{U}_n \\ \omega \neq 1}} \frac{1}{1-\omega}$.