Devoir Surveillé 06

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.

Exercice 1 (Du cours).

1. Soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite qui converge vers 0.
   Montrer que $(u_n v_n)$ tend vers 0.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que M s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
3. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues qui ne s'annulent pas et telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f(x))^2 = (g(x))^2.$$
   Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 2 (Une étude de suite).

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

On pose pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$.

2. Justifier que f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
3. Vérifier que f est prolongeable par continuité en 0.
   On note encore f son prolongement.
4. Soit $g : x \mapsto (x-1)e^x + 1$. En étudiant les variations de g, montrer que g est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Justifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ puir dresser son tableau de variations complet.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
7. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = f(-x)$.
   (b) En déduire la monotonie de la suite (u_n).
8. Justifier que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 (Des matrices).
La partie I est indépendante des trois autres. Pour les parties II, III et IV : on pourra utiliser les résultats des parties précédentes pour répondre aux questions.

Partie I

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = 3I_2 + J = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. La matrice J est-elle inversible ? Justifier.
2. Calculer J^2 et exprimer le résultat en fonction de J.
3. Déterminer la valeur de J^k en fonction de J pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer A^n et exprimer le résultat à l'aide de n, J et I_2.
   On fera attention aux hypothèses d'application de la formule.

Partie II

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Dans cette partie, on calcule les puissances de M.
Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
6. Vérifier que $P^{-1}MP = D$ puis exprimer M en fonction de P, P^{-1} et D.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}M^nP$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer D^n puis M^n.

Partie III

On reprend les matrices M, D et P de la partie précédente.
Dans cette partie, on cherche à résoudre l'équation $X^2 = M$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

9. (a) Soit $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $YD = DY$. Montrer que Y est diagonale.
   (b) Soit $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $Y^2 = D$. Montrer que Y est diagonale.
   (c) En déduire les solutions de $Y^2 = D$ d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
10. Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Y = P^{-1}XP$. Montrer que $X^2 = M \iff Y^2 = D$.
    On pourra utiliser la question 7.
11. Déterminer les solutions de $X^2 = M$.

Partie IV

Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $\mathscr{C}(B) = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BN = NB\}$. C'est donc l'ensemble des matrices qui commutent avec B.

12. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donner deux éléments simples de $\mathscr{C}(B)$.
13. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $N \in \mathscr{C}(M) \iff P^{-1}NP \in \mathscr{C}(D)$, où M, P et D sont les matrices des parties précédentes.

14. Justifier que $\mathscr{C}(D) = \mathrm{Vect}\left(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}\right)$, où $E_{1,1}$, $E_{2,2}$ et $E_{3,3}$ sont les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:
$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. En déduire que $\mathscr{C}(M) = \mathrm{Vect}(N_1, N_2, N_3)$, où N_1, N_2 et N_3 sont trois matrices à préciser.

Exercice 4 (Une suite implicite). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x^n + 16x^2 - 9$, définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive.
   On notera cette solution u_n.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left]0, \frac{3}{4}\right[$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall x \in]0,1[,\ f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_{n+1}) > 0$.
   (c) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (d) Montrer que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.
3. (a) Déterminer la limite de la suite $(u_n^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) En déduire la valeur de ℓ.
4. (a) Montrer que $u_n^n = O\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \frac{3}{4} = -\frac{u_n^n}{16\left(u_n + \frac{3}{4}\right)}$.
   (c) En déduire que $u_n = \frac{3}{4} + O\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.
   (d) Montrer que $\ln(u_n) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + O\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.
   (e) En déduire que $u_n^n \sim \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
   (f) Déterminer un équivalent simple de $u_n - \frac{3}{4}$.

Correction du Devoir Surveillé 06

Correction de l'exercice 1 :

1. Comme (u_n) est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n v_n| = |u_n||v_n| \leq M|v_n|$. Or $M|v_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\boxed{u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ par encadrement}}$.
2.
   - Analyse : supposons qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = S + A$.
     Alors $M^\top = (S+A)^\top = S - A$ par linéarité de la transposée. Donc $M + M^\top = 2S$ et $M - M^\top = 2A$. Ainsi, $S = \dfrac{M+M^\top}{2}$ et $A = \dfrac{M-M^\top}{2}$.
   - Synthèse : posons $A = \dfrac{M-M^\top}{2}$ et $S = \dfrac{M+M^\top}{2}$. On vérifie facilement que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $S + A = M$.

   On a donc montré que $\boxed{M \text{ s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique}}$.
3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a < b$ dans I. Pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $y = f(c)$.
4. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = |g(x)|$. De plus, comme f et g ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$, elles sont de signe constant sur $\mathbb{R}$ d'après le TVI.
   - si f et g sont de même signe, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$;
   - si f et g sont de signes opposés, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -g(x)$.

   Ainsi, $\boxed{f = g \text{ ou } f = -g}$.

Correction de l'exercice 2 :

1. On dresse le tableau de signes pour l'expression $\dfrac{e^x - 1}{x}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{e^x-1}{x}$		$+$	$\|\|$	$+$	

   Ainsi, on a bien : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \dfrac{e^x-1}{x} > 0}$.
2. Comme ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{e^x-1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$, par opérations la fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
3. On calcule la limite de f en 0 : on a $\dfrac{e^x-1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \ln(1) = 0$ car ln est continue en 1.
   Ainsi, $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } f(0) = 0}$.
4. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = x e^x$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

   $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est bien positive sur } \mathbb{R}}$.
5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)e^x + 1}{x(e^x-1)} = \dfrac{g(x)}{x(e^x-1)}$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par croissances comparées. On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x(e^x-1)$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On remarque que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \text{ et sur } \mathbb{R}_-}$.

6. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n > 0$.
   - Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = \alpha > 0$ par hypothèse.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$. Or f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f(0) = 0$, donc $f(u_n) > f(0)$ et $u_{n+1} > 0$.

   D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$.
7. (a) Si $x = 0$, alors $f(x) - x = f(0) - 0 = 0$ et $f(-x) = f(0) = 0$, donc la formule est vraie.
   Si $x \in \mathbb{R}^*$, alors
   $$f(-x) = \ln\left(\frac{e^{-x}-1}{-x}\right) = \ln\left(\frac{1-e^x}{-xe^x}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^x}\,\frac{e^x-1}{x}\right) = -x + f(x)$$
   Ainsi, on a bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x = f(-x)}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = f(-u_n)$ d'après la question précédente. Or $-u_n < 0$ et la fonction f est strictement négative sur $]-\infty, 0[$, donc $f(-u_n) < 0$. Donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement décroissante}}$.
8. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, comme f est continue, ℓ est un point fixe de f, c'est-à-dire : $f(\ell) = \ell$. Donc $f(\ell) - \ell = 0 = f(-\ell)$. Or f ne s'annule qu'en 0. D'où $\ell = 0$.
   Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$.

Correction de l'exercice 3 :

1. $\boxed{J \text{ n'est pas inversible}}$ car ses deux lignes sont égales.
2. On a $\boxed{J^2 = 2J}$.
3. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $J^k = 2^{k-1}J$.
   - Initialisation : pour $k = 1$, $J^1 = J = 2^{1-1}J$.
   - Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $J^k = 2^{k-1}J$. Alors $J^{k+1} = JJ^k = 2^{k-1}J^2 = 2^kJ$ par HR et en utilisant la question précédente.

   Ainsi, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ J^k = 2^{k-1}J}$.
4. On vérifie d'abord que $3I_2$ et J commutent. On peut donc appliquer la formule du binôme :
   $$\begin{aligned}
   A^n = (3I_2 + J)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k 3^{n-k} I_2^{n-k} \\
   &= \binom{n}{0} 3^n I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} 3^{n-k} J && \text{d'après la question précédente} \\
   &= 3^n I_2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} 3^{n-k}\right) J \\
   &= 3^n I_2 + \frac{1}{2}\left(-\binom{n}{0} 2^0 3^{n-0} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k}\right) J \\
   &= 3^n I_2 + \frac{1}{2}\left(-3^n + (2+3)^n\right) J \\
   &= 3^n I_2 + \frac{5^n - 3^n}{2} J
   \end{aligned}$$
   Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = 3^n I_2 + \frac{5^n - 3^n}{2} J}$.
5. On applique le pivot de Gauss :
   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
   Donc $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.
6. Facile ! On calcule $P^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, puis on remultiplie par P à droite.

   On a donc $\boxed{M = PDP^{-1}}$.
7. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $D^n = P^{-1}M^nP$.
   - Initialisation : pour $n = 0$, $D^0 = I_3$ et $P^{-1}M^0P = P^{-1}I_3P = I_3$. Donc la formule est vraie pour $n = 0$.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $D^n = P^{-1}M^nP$.
     Alors $D^{n+1} = D \times D^n = P^{-1}MPP^{-1}M^nP$ par HR.
     Donc $D^{n+1} = P^{-1}MI_3M^nP = P^{-1}M^{n+1}P$.

   D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = P^{-1}M^nP}$.

8. D est une matrice diagonale, donc $\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

   D'après la question précédente, $M^n = PD^nP^{-1}$. Après les calculs, on obtient $\boxed{M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^n - 1 \\ 1-2^n & 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}}$.

9. (a) On calcule :
$$YD = \begin{pmatrix} 3a & 2b & c \\ 3d & 2e & f \\ 3g & 2h & i \end{pmatrix}, \quad DY = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$
   Ainsi, comme $YD = DY$, on a $b = c = d = f = g = h = 0$ donc $\boxed{Y \text{ est diagonale}}$.

   (b) On vérifie que $YD = Y^3 = DY$. D'après la question précédente, $\boxed{Y \text{ est diagonale}}$.

   (c) D'après la question précédente, si Y est solution de $Y^2 = D$, alors $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$. De plus, $a^2 = 3$, $b^2 = 2$ et $i^2 = 1$. On a donc $\boxed{Y = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}}$. On vérifie ensuite que ces 8 matrices sont bien solutions de l'équation.

10. $Y^2 = D \iff (P^{-1}XP)^2 = D \iff P^{-1}X^2P = D$ d'après la question 7.
    Donc $\boxed{Y^2 = D \iff X^2 = PDP^{-1} = M}$.

11. X est une solution de $X^2 = M$ ssi $Y = P^{-1}XP$ est solution de $Y^2 = D$ d'après la question précédente.
    Or les solutions de $Y = D^2$ sont $Y = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$.
    Donc les solutions de $X^2 = M$ sont les 8 matrices $\boxed{P \begin{pmatrix} \pm\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} P^{-1}}$.

12. Les matrices $I_n, 0_n, B$ sont des exemples d'éléments de $\mathscr{C}(B)$.

13.
$$\begin{aligned} P^{-1}NP \in \mathscr{C}(D) &\iff DP^{-1}NP = P^{-1}NPD \\ &\iff PDP^{-1}N = NPDP^{-1} \\ &\iff MN = NM \\ &\iff N \in \mathscr{C}(M) \end{aligned}$$

14. Raisonnons par double inclusion :
    - soit $N \in \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$. Il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $N = \lambda_1 E_{1,1} + \lambda_2 E_{2,2} + \lambda_3 E_{3,3}$.
      On vérifie alors que $DE_{1,1} = E_{1,1}D$, $DE_{2,2} = E_{2,2}D$ et $DE_{3,3} = E_{3,3}D$.
      Ainsi, $ND = \lambda_1 E_{1,1}D + \lambda_2 E_{2,2}D + \lambda_3 E_{3,3}D = \lambda_1 DE_{1,1} + \lambda_2 DE_{2,2} + \lambda_3 DE_{3,3} = DN$. Donc $N \in \mathscr{C}(D)$.
    - soit $N \in \mathscr{C}(D)$. Alors $ND = DN$. D'après la question 9a, $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{3,3} \in \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$.

    Ainsi, $\boxed{\mathscr{C}(D) = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})}$.

15. Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. D'après la question 13, $N \in \mathscr{C}(M) \iff PNP^{-1} \in \mathscr{C}(D) = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$.
    Donc $N \in \mathscr{C}(M) \iff \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, P^{-1}NP = \lambda_1 E_{1,1} + \lambda_2 E_{2,2} + \lambda_3 E_{3,3} \iff \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, N = \lambda_1 PE_{1,1}P^{-1} + \lambda_2 PE_{2,2}P^{-1} + \lambda_3 PE_{3,3}P^{-1}$.
    Ainsi, $\boxed{\mathscr{C}(M) = \mathrm{Vect}(PE_{1,1}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{3,3}P^{-1})}$.

Correction de l'exercice 4 :

1. (a) La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 32x$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(0) = -9$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, d'après le TBM, f_n est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[-9, +\infty[$.
   Comme $0 \in [-9, +\infty[$, 0 a un unique antécédent par f_n (qui n'est pas 0).
   Donc l'équation $\boxed{f_n(x) = 0 \text{ a une unique solution dans }]0, +\infty[}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $f_n(0) = -9$ et $f_n\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3^n}{4^n}$, on a $-9 < 0 < \frac{3^n}{4^n}$. Or, f_n^{-1} est strictement croissante, donc $0 < f_n^{-1}(0) = u_n < \frac{3}{4}$ et $\boxed{u_n \in \left]0, \frac{3}{4}\right[}$.

2. (a) Soit $x \in]0,1[$. On a $x^{n+1} < x^n$, donc $\boxed{f_{n+1}(x) < f_n(x)}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 1b, $u_{n+1} \in]0,1[$, donc $f_{n+1}(u_{n+1}) < f_n(u_{n+1})$. Or $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, donc $\boxed{f_n(u_{n+1}) > 0}$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f_n^{-1} est strictement croissante et d'après la question précédente, $u_{n+1} > f_n^{-1}(0) = u_n$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante}}$.

(d) D'après la question 1b, (u_n) est majorée et d'après la question précédente, (u_n) est croissante. D'après le TLM, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$.

3. (a) D'après la question 1b, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leq \frac{3}{4}$, donc $|u_n^n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Comme $\frac{3}{4} \in [0,1[$, $\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$. Par encadrement, $\boxed{u_n^n \to 0}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^n = -16u_n^2 + 9$. Donc $-16u_n^2 + 9 \to 0$ d'après la question précédente. Or, $-16u_n^2 + 9 \to -16\ell^2 + 9$. Ainsi, $-16\ell^2 + 9 = 0$, ce qui donne $\ell^2 = \frac{9}{16}$ par unicité de la limite. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$, donc $\ell \geq 0$. Donc $\boxed{\ell = \frac{3}{4}}$.

4. (a) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{3}{4}$, on a $0 \leq u_n^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Donc $\boxed{u_n^n = O\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$: $-u_n^n = 16u_n^2 - 9 = 16\left(u_n^2 - \frac{9}{16}\right) = 16\left(u_n - \frac{3}{4}\right)\left(u_n + \frac{3}{4}\right)$.

Comme $u_n \in [0, 3/4]$, $u_n + \frac{3}{4} > 0$, donc $\boxed{u_n - \frac{3}{4} = -\frac{u_n^n}{16\left(u_n + \frac{3}{4}\right)}}$.

(c) Comme $u_n \to \frac{3}{4}$, $-\frac{1}{16\left(u_n + \frac{3}{4}\right)} = O(1)$. Donc $u_n - \frac{3}{4} = O(u_n^n)$. D'après 4a, $\boxed{u_n - \frac{3}{4} = O\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}$.

(d) D'après la question précédente, $\ln(u_n) = \ln\left(\frac{3}{4} = O\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(1 + O\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + O\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$ car $\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$.

(e) On a $u_n^n = \mathrm{e}^{n\ln(u_n)} = \mathrm{e}^{n\ln\left(\frac{3}{4}\right) + nO\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \mathrm{e}^{nO\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}$. Par croissances comparées, $nO\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \to 0$, donc $e^{nO\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)} \to 1$.

Ainsi, $\boxed{u_n^n \sim \left(\frac{3}{4}\right)^n}$.

(f) D'après 4b et la question précédente, $\boxed{u_n - \frac{3}{4} = -\frac{u_n^n}{16\left(u_n + \frac{3}{4}\right)} \sim -\frac{1}{24}\left(\frac{3}{4}\right)^n}$.