Devoir Surveillé 06*

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.

Exercice 1 (Pour s'échauffer).
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Prouver que f est prolongeable par continuité en 0.
   On notera encore f ce prolongement.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(u_n) = \dfrac{1}{n+1}$.
4. Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on précisera.

Problème 1 (BW et le TBA).

Partie I

On veut montrer dans cette partie le théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite réelle bornée admet une suite extraite convergente.

1. Soit (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (-1)^n$.
   (a) Justifier que (v_n) est bornée.
   (b) Déterminer une suite extraite de (v_n) qui converge.
   (c) Prouver que (v_n) ne converge pas.

Soit (u_n) une suite réelle bornée. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.
On définit les suites (a_n) et (b_n) par récurrence par :

- $a_0 = -M$ et $b_0 = M$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right) & \text{si } \left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right] \text{ contient une infinité} \\ & \text{de termes de la suite } (u_n) \\ \left(\dfrac{a_n+b_n}{2}, b_n\right) & \text{sinon.} \end{cases}$

2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le segment $S_n = [a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n).
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} \subset S_n$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n - a_n = \dfrac{M}{2^{n-1}}$.
   (d) En déduire que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
3. On définit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par :
   - $\varphi(0) = 0$
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n+1) = \min\left(\{m \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) < m \text{ et } u_m \in S_{n+1}\}\right)$.

   (a) Montrer que φ est bien définie.
   (b) Montrer que φ est strictement croissante.

(c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in S_n$.

4. Conclure.

Partie II

Dans cette partie, on veut montrer le théorème des bornes atteintes. On pourra utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass démontré (ou non) dans la partie I.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On pose $\sup(f) = \sup(f([a,b])) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, qui est réel si f est majorée et qui vaut $+\infty$ sinon.

5. Montrer qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de $[a,b]$ telle que $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup(f)$.
On montrera d'abord l'existence lorsque $\sup(f) \in \mathbb{R}$ *puis lorsque* $\sup(f) = +\infty$.
6. Justifier qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge.
On note $d \in [a,b]$ sa limite.
7. Montrer que $f(d) = \sup(f)$.
8. Conclure.

Problème 2 (Une matrice de permutation).

Ce problème est constitué de quatre parties. Les trois premières parties ont pour objectif d'étudier quelques propriétés de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La partie **III** utilise des résultats de la partie **II**. La dernière partie est indépendante des autres.

I - Étude des éléments propres de A

On rappelle que le nombre complexe j est défini par $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.

1. Soient a, b et c dans $\mathbb{C}$. On pose $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On pose $P(\lambda) = \lambda^3 - a\lambda^2 - b\lambda - c$.
Montrer que $\det(\lambda I_3 - M) = P(\lambda)$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $P(\lambda)$ pour que la matrice $\lambda I_3 - M$ soit inversible.
3. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles la matrice $\lambda I_3 - A$ n'est **pas** inversible.
4. Rappeler la valeur de $1 + j + j^2$ et justifier que $j^2 = \overline{j}$.
5. Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Justifier que $AX = \lambda X \iff (\lambda I_3 - A)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
6. Résoudre les trois équations

$$(E_1) : AX = X \qquad (E_2) : AX = jX \qquad (E_3) : AX = j^2 X$$

d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$. On exprimera les ensembles des solutions respectivement comme Vect(U_1), Vect(U_2) et Vect(U_3) où U_1, U_2 et U_3 sont de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ * \\ * \end{pmatrix}$.

II - Étude des puissances de A

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$.

7. Soient a, b et c dans $\mathbb{C}$. Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.
8. En utilisant la question précédente, montrer que P est inversible. *On ne demande pas de calculer P^{-1}.*

On note $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ les colonnes de P.

9. Toujours sans calculer P^{-1}, déterminer les matrices colonnes $P^{-1}C_1$, $P^{-1}C_2$ et $P^{-1}C_3$.
10. Exprimer les colonnes de la matrice AP en fonction des colonnes de P.
11. En déduire que $P^{-1}AP = D$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$.
12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n.

III - Étude d'une relation de récurrence linéaire

On reprend les notations des parties précédentes. On cherche à déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence linéaire d'ordre 3 suivante :

$$(*) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = u_n$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs complexes. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}X_n$.

13. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(*)$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
14. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(*)$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = DY_n$. *On ne demande toujours pas de calculer P^{-1}.*
15. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(*)$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n = D^nY_0$.
16. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(*)$ si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha + \beta j^n + \gamma \overline{j}^n.$$
17. Montrer que l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $(*)$ avec $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 0$ est donnée par
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right).$$

IV - Une généralisation de la matrice A

Soit $n \geqslant 2$. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (dans le cas $n = 3$, on retrouve la matrice A des parties précédentes).

On considère également les matrices colonnes $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

18. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $1 \leq k \leq n$, exprimer Me_k en fonction des colonnes de M.
19. Pour $1 \leq k \leq n$, exprimer Be_k en fonction de $e_1, \dots, e_n$.
20. Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Pour $1 \leq k \leq n$, exprimer $B^p e_k$ en fonction de $e_1, \dots, e_n$. On distinguera les cas $k \leq n - p$ et $k > n - p$.
21. Justifier que $B^n = I_n$.

On considère l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathrm{Vect}(I_n, B, \dots, B^{n-1}) \\ (a_0, \dots, a_{n-1}) & \longmapsto & a_0 I_n + a_1 B + \dots + a_{n-1} B^{n-1} \end{array} \right.$$

22. Justifier que Φ est surjective.
23. Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Expliciter la matrice $\Phi(a_0, \dots, a_{n-1})$.
24. Montrer que Φ est bijective.

Correction du Devoir Surveillé 06*

Correction de l'exercice 1 :

1. Pour tout $x>0$, $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(x)}$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.
2. On a $\dfrac{\ln(x)}{x}\xrightarrow[x\to 0^+]{}-\infty$, donc $f(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{}0$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0)=0}$.
3. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{x}}$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[0,\mathrm{e}]$ et strictement décroissante sur $[\mathrm{e},+\infty[$.
D'après le TBM, f réalise une bijection de $[0,\mathrm{e}]$ sur $[f(0),f(\mathrm{e})]=[0,\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$.
De même, comme $\mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{x}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$ par croissances comparées, f réalise une bijection de $[\mathrm{e},+\infty[$ sur $]1,\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $\dfrac{1}{n+1}<1$, donc $\dfrac{1}{n+1}\in[0,\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$ mais $\dfrac{1}{n+1}\notin]1,\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$. Ainsi, $\boxed{\dfrac{1}{n+1} \text{ a un unique antécédent par } f,\ u_n\in[0,\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]}$
4. Notons f^{-1} la réciproque de $f:[0,\mathrm{e}]\to[0,\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$. Par définition de u, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$. Or, d'après le TBM, f^{-1} est continue en 0, donc $f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\to f^{-1}(0)=0$.
Ainsi, $\boxed{u_n\to 0}$.

Correction du problème 1 :

1. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|v_n|=1\leq 1$, donc $\boxed{(v_n) \text{ est bornée}}$.
   (b) On a $v_{2n}=1\to 1$, donc $\boxed{(v_{2n}) \text{ converge}}$.
   (c) $v_{2n+1}=-1\to -1$, donc (v_n) a deux suites extraites qui convergent vers deux limites différentes. Ainsi $\boxed{(v_n) \text{ diverge}}$.
2. (a) On procède par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$:
   - Initialisation : pour $n=0$, on a par définition, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[-M,M]=[a_0,b_0]$, donc S_0 contient bien une infinité de termes de (u_n).
   - Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que S_n contient une infinité de termes de la suite (u_n). Alors les deux intervalles $\left[a_n,\dfrac{a_n+b_n}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{a_n+b_n}{2},b_n\right]$ ne peuvent pas tous les deux contenir qu'un nombre fini de termes de (u_n). Donc au moins un des deux en contient une infinité, et S_{n+1} contient bien une infinité de termes de (u_n).

   D'après le principe de récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{S_n \text{ contient une infinité de termes de } (u_n)}$.

   (b) Soit $n\in\mathbb{N}$. Comme les deux intervalles $\left[a_n,\dfrac{a_n+b_n}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{a_n+b_n}{2},b_n\right]$ sont inclus dans S_n et qu'un des deux est S_{n+1}, on a bien $\boxed{S_{n+1}\subset S_n}$.
   (c) Soit $n\in\mathbb{N}$.
   - si $a_{n+1}=a_n$ et $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$, alors $b_{n+1}-a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}-a_n=\dfrac{b_n-a_n}{2}$;
   - de même si $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1}=b_n$, on a de même $b_{n+1}-a_{n+1}=\dfrac{b_n-a_n}{2}$.

   Ainsi (b_n-a_n) est une suite géométrique de raison 2. Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n-a_n=\dfrac{1}{2^n}(b_0-a_0)=\dfrac{2M}{2^n}$. Ainsi, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ b_n-a_n=\dfrac{M}{2^{n-1}}}$.

   (d) D'après la question 2b, $\forall n\in\mathbb{N}$, $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$, donc $a_n\leq a_{n+1}$ et $b_{n+1}\leq b_n$. Ainsi (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
   D'après la question 2c, $b_n-a_n\to 0$.
   Donc $\boxed{(a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont adjacentes}}$.
3. (a) On procède par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$:
   - Initialisation : $\varphi(0)=0$ est bien définie.
   - Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\varphi(n)$ est bien définie. Comme l'intervalle S_{n+1} contient une infinité de termes de la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, il contient encore une infinité de termes de $(u_m)_{m>\varphi(n)}$. Ainsi l'ensemble $\{m\in\mathbb{N}\mid\varphi(n)<m \text{ et } u_n\in S_{n+1}\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide : il admet un minimum et $\varphi(n+1)$ est bien définie.

D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \text{ est bien définie}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $\varphi(n) < \varphi(n+1)$. Donc $\boxed{\varphi \text{ est strictement croissante}}$.

(c) Pour $n = 0$, $\varphi_0 = 0$, et $u_0 = 0 \in [-M, M] = S_0$.
Puis, si $n \in \mathbb{N}$, par définition, $u_{\varphi(n+1)} \in S_{n+1}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{\varphi(n)} \in S_n$.
Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{\varphi(n)} \in S_n}$.

4. D'après la question 3b, la suite $(u_{\varphi(n)})$ est extraite de (u_n).
D'après la question 3c, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$.
D'après la question 2d, (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ.
Par encadrement, $u_{\varphi(n)} \to \ell$.
Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ admet une suite extraite convergente}}$.

5.
   - Supposons tout d'abord que $\sup(f) \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup(f) - \dfrac{1}{n+1}$ n'est pas un majorant de $f([a,b])$, donc il existe $y_n \in f([a,b])$ tel que $\sup(f) - \dfrac{1}{n+1} \leq y_n \leq \sup(f)$. Comme $y_n \in f([a,b])$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $y_n = f(x_n)$. On obtient ainsi une suite (x_n) d'éléments de $[a,b]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup(f) - \dfrac{1}{n+1} \leq f(x_n) \leq \sup(f)$. Par encadrement, $\boxed{f(x_n) \to \sup(f)}$.
   - Supposons maintenant que $\sup(f) = +\infty$, donc que f n'est pas majorée. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in f([a,b])$ tel que $y_n \geq n$ (sinon n serait un majorant). Ainsi, on obtient $x_n \in [a,b]$ tel que $y_n = f(x_n) \geq n$. Par minoration, $\boxed{f(x_n) \to +\infty}$.

6. La suite (x_n) est bornée entre a et b.
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, $\boxed{\text{il existe une suite extraite } (x_{\varphi(n)}) \text{ de } (x_n) \text{ qui converge}}$.

7. Comme f est continue, $f(x_{\varphi(n)}) \to f(d)$. Mais $(f(x_{\varphi(n)}))$ est une suite extraite de $(f(x_n))$, donc $f(x_{\varphi(n)}) \to \sup(f)$.
Par unicité de la limite, $\boxed{f(d) = \sup(f)}$.

8. On a montré que f admet un maximum sur $[a,b]$ en d. Puis, $-f$ admet aussi un maximum en $e \in [a,b]$: $\forall x \in [a,b]$, $-f(x) \leq -f(e)$, donc $\forall x \in [a,b]$, $f(e) \leq f(x)$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ admet un maximum et un minimum sur } [a,b]}$.

Correction du problème 2 :

1. $\det(\lambda I_3 - M) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b & -c \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a)\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & -c \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - a) - b\lambda + c$ en développant par rapport à la première colonne. On trouve donc $\boxed{\det(\lambda I_3 - M) = P(\lambda)}$.

2. D'après le cours, $\lambda I_3 - M$ est inversible ssi son déterminant est non nul. Donc $\boxed{\lambda I_3 - M \in GL_3(\mathbb{C}) \iff P(\lambda) \neq 0}$.

3. On remarque qu'en prenant $a = b = 0$ et $c = 1$, on retrouve la matrice A. Donc d'après la question précédente, $\lambda I_3 - A$ n'est pas inversible ssi $\lambda^3 - 1 = 0$. Or les solutions complexes de cette équation sont les racines troisème de l'unité : 1, j et j^2. Autrement dit $\boxed{\lambda I_3 - A \notin GL_3(\mathbb{C}) \iff \lambda \in \{1, j, j^2\}}$.

4. La somme des racines n-ième de l'unité est nulle : $\boxed{1 + j + j^2 = 0}$.

   Comme $j^3 = 1$, $\boxed{j^2 = \dfrac{1}{j} = \overline{j}}$.

5. $AX = \lambda X \iff \lambda X - AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (\lambda I_3 - A)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. Le système (E_1) est équivalent à $\begin{cases} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$. L'ensemble des solutions est $\mathrm{Vect}(U_1)$ avec $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Le système (E_2) est équivalent à $\begin{cases} jx - z = 0 \\ -x + jy = 0 \\ -y + jz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = jx \\ y = j^2 x \end{cases}$. L'ensemble des solutions est $\mathrm{Vect}(U_2)$ avec $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$.

Le système (E_3) est équivalent à $\begin{cases} j^2x - z = 0 \\ -x + j^2y = 0 \\ -y + j^2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = j^2x \\ y = jx \end{cases}$. L'ensemble des solutions est $\mathrm{Vect}(U_3)$ avec $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a)-(c-a)(b-a)(b+a) = (b-a)(c-a)(c+a-b-a)$, odonc on trouve bien $\boxed{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)}$.
8. En prenant $a=1$, $b=j$ et $c=j^2$ dans la question précédente, $\det(P) = (j-1)(j^2-1)(j^2-j) \neq 0$. Donc $\boxed{P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})}$.
9. Comme $P^{-1}P = I_3$, $P^{-1}C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1}C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
10. On a $AP = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$. Donc en notant B_1, B_2 et B_3 les trois colonnes de AP, $\boxed{B_1 = C_1,\ B_2 = jC_2 \text{ et } B_3 = j^2C_3}$.
11. D'après les deux questions précédentes, les trois colonnes de $P^{-1}AP$ sont $P^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1}B_2 = j\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}B_3 = j^2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On trouve donc bien $\boxed{P^{-1}AP = D}$.
12. D'après la question précédente, $A = PDP^{-1}$, donc $\boxed{A^n = PD^nP^{-1}}$.
13. On remarque que : $\forall n \in \mathbb{N},\ AX_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_n \iff (u_n)$ vérifie $(*)$.
14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = P^{-1}X_n$, donc $DY_n = DP^{-1}X_n = P^{-1}AX_n$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_{n+1} = DY_n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ P^{-1}X_{n+1} = P^{-1}AX_n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n \iff (u_n)$ vérifie $(*)$ d'après la question précédente.
15. Supposons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_{n+1} = DY_n$. Alors par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = D^nY_0$.
Réciproquement, supposons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = D^nY_0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = D^{n+1}Y_0 = DD^nY_0 = DY_n$.
D'après la question précédente, (u_n) vérifie $(*)$ ssi $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = D^nY_0$.
16. Supposons que (u_n) vérifie $(*)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = D^nY_0$, donc $X_n = PD^nY_0$. En calculant la dernière ligne du produit, il existe bien trois complexes α, β, γ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha + \beta j^n + \gamma \overline{j}^n$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha + \beta j^n + \gamma \overline{j}^n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = \alpha + \beta j^{n+3} + \gamma \overline{j}^{n+3} = \alpha + \beta j^n + \beta \overline{j}^n = u_n$. Donc (u_n) vérifie $(*)$.
17. On utilise la question précédente : il existe α, β et $\gamma \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha + \beta j^n + \gamma \overline{j}^n$.
Pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ on obtient trois équations :
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + \beta j + \gamma \overline{j} = 0 \\ \alpha + \beta \overline{j} + \gamma j = 0 \end{cases}$$
En ajoutant les trois lignes, on a $3\alpha = 1$, donc $\alpha = \frac{1}{3}$. En faisant $L_1 + \overline{j}L_2 + jL_3$, on trouve $3\beta = 1$, donc $\beta = \frac{1}{3}$. Donc $\gamma = \frac{1}{3}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(j^n + \overline{j}^n) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}2\mathrm{Re}(j^n)$. D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}$.
18. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. En posant le produit, on trouve que Me_k est la k-ième colonne de M.

19. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. D'après la question précédente, $Be_k = \begin{cases} e_{k+1} & \text{si } k < n \\ e_1 & \text{si } k = n. \end{cases}$

20. Soit $k \in [\![1, n-p]\!]$: on voit par une récurrence que $B^p e_k = e_{k+p}$.
Soit $k \in [\![n-p+1, n]\!]$: on voit alors que $B^p e_k = e_{k+p-n}$.

21. Pour $p = n$, et $k \in [\![1, n]\!]$, $B^n e_k = e_{k+n-n} = e_k$. Ainsi, les colonnes de B^n sont les colonnes de I_n : $B^n = I_n$.

22. Soit $M \in \mathrm{Vect}(I_n, B, \ldots, B^{n-1})$. Par définition, il existe des scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $M = a_0 I_n + a_1 B + a_2 B^2 + \cdots + a_{n-1} B^{n-1}$. Autrement dit, $M = \Phi(a_0, \ldots, a_{n-1})$. Ainsi, $\boxed{\Phi \text{ est surjective}}$.

23. $\Phi(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_3 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_2 & \ddots & a_0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_1 & a_0 & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$.

24. Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\Phi(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \Phi(b_0, \ldots, b_{n-1})$. D'après la question précédente, en regardant la première colonne, on obtient $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}$. Donc Φ est bien injective. Ainsi, $\boxed{\Phi \text{ est bijective}}$.