Devoir sur temps libre 5

(À remettre le MARDI 4 MARS 2025)

Exercice 1 (Deux fonctions continues).
Soit $a < b$ deux réels. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ et $g : [a,b] \to [a,b]$ deux fonctions continues. On suppose que :

$$\forall x \in [a,b], \quad f(g(x)) = g(f(x)).$$

On souhaite montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = g(c)$. On raisonne par l'absurde et on suppose que :

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) \neq g(x).$$

1. Justifier que la fonction $f - g$ est de signe constant sur $[a,b]$.

On suppose dans la suite que $f - g$ est strictement positive sur $[a,b]$, c'est-à-dire :

$$(*) \quad \forall x \in [a,b], \quad f(x) > g(x).$$

2. Justifier que la fonction f admet au moins un point fixe.
3. Soit $x_0 \in [a,b]$ un point fixe de f. On définit la suite (x_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.
   (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq x_n \leq b$.
   (b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = x_n$.
   (c) En déduire que la suite (x_n) converge vers un réel ℓ tel que $a \leq \ell \leq b$.
   On pourra utiliser $(*)$.
   (d) Justifier que ℓ est un point fixe de f et de g.
   (e) Conclure.

Exercice 2 (Une (?) fonction).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \begin{cases} x^n \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que f_n est dérivable en 0 si et seulement si $n > 1$.
4. Montrer que pour tout $n > 1$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3 (Une (?) fonction dérivable (?)).
Soit a et b deux réels et soit $f : x \mapsto \begin{cases} a + b\mathrm{e}^x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2 - x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer, en justifiant en détails, les valeurs de a et b pour lesquelles f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4 (Méthode de Newton).
La méthode de Newton est un algorithme pour trouver une valeur approchée d'une équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire de l'abscisse d'un point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses, lorsque f est une fonction dérivable.
Le principe est simple : on part d'une valeur quelconque x_0 et on remplace $\mathscr{C}_f$ par sa tangente T_0 au point d'abscisse x_0. Il est alors facile de trouver l'abscisse x_1 du point d'intersection de T_0 avec Ox.
On cherche ensuite l'abscisse x_2 du point d'intersection de Ox avec la tangente T_1 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_1, et ainsi de suite.

1. On prend $f : x \mapsto x^2 - 2$. Tracer $\mathscr{C}_f$ sur $[0,4]$, et en prenant $x_0 = 4$, placer les valeurs de x_1, x_2 etc... sur l'axe des abscisse.

On va justifier que dans le cas général, cette méthode fonctionne bien et donne très vite une valeur très approchée de la solution cherchée. On prend $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et suppose que :

- f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$;
- $f(a)f(b) < 0$;
- f' est strictement positive sur $[a,b]$;
- f est convexe sur $\mathbb{R}$.

On choisit un $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$ et on définit la suite (x_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} est le point d'intersection de la tangente T_n à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_n avec l'axe des abscisses.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner l'équation de T_n, puis justifier que $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

On définit $g : x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ sur $[a,b]$.

3. Justifier qu'il existe un unique réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.
4. On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [c,b]$.
   (a) Justifier que $x_0 \in [c,b]$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $x_n \in [c,b]$.
      i. Justifier que $x_{n+1} \leq x_n$.
      ii. Justifier que : $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$.
      Rappel : f est convexe.
      iii. En déduire que $0 \geq c - x_n + \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
      iv. En déduire que $x_{n+1} \in [c,b]$.
   (c) Conclure.
5. Montrer que (x_n) converge.
6. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = c$.

On s'intéresse maintenant à la vitesse de convergence de la suite (x_n).

7. (a) Justifier que g est dérivable sur $[a,b]$ et que pour tout $x \in [a,b]$, $g'(x) = \dfrac{(f(x) - f(c))f''(x)}{(f'(x))^2}$.
   (b) Justifier qu'il existe $M_1 > 0$, $M_2 \geq 0$ et $M_3 \geq 0$ tels que pour tout $x \in [a,b]$, $(f'(x))^2 \geq M_1$, $|f''(x)| \leq M_2$ et $|f'(x)| \leq M_3$.
   (c) Soit $x \in [c,b]$.
      i. Prouver que pour tout $t \in [c,x]$, $|f(t) - f(c)| \leq M_3|t - c|$.
      ii. En déduire qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout $t \in [c,x]$, $|g'(t)| \leq K|x - c|$.
   (d) Prouver que pour tout $x \in [c,b]$, $|g(x) - c| \leq K|x - c|^2$.
   (e) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - c| \leq \dfrac{1}{K}(K(b-a))^{2^n}$.

Ainsi, si on choisit notre intervalle de départ assez petit, on obtient $K(b-a) < 1$ et la convergence de la suite (x_n) est extrêmement rapide : par exemple, si $K(b-a) \leq \dfrac{1}{10}$, le nombre de décimales exactes de c données par (x_n) double à chaque nouveau terme de la suite.