Contrôle de cours 14 - Dérivabilité - Sujet A
Jeudi 13 février 2025

Question 1 (1 pt)

Énoncer le théorème de Rolle :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$. ☐

Question 2 (1 pt)

Énoncer le théorème des accroissements finis :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur Í$]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ☐

Question 3 (1 pt)

Énoncer l'inégalité des accroissements finis (version avec des valeurs absolues) :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur Í$]a,b[$ et telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ avec $\forall x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leq M$. Alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$. ☐

Question 4 (1 pt)

Énoncer le théorème de la limite de la dérivée :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell$, alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.
De plus, si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et f' est continue en a.
Si $\ell = \pm\infty$, alors $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale en a. ☐

Question 5 (1 pt)

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. Alors fg est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Question 6 (1 pt)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Donner la définition de f est convexe sur I :
$\forall (a,b) \in I^2$, $\forall t \in [0,1]$, $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$ ☐

Question 7 (3 pts)

Justifier que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On va appliquer le théorème de la limite de la dérivée :

- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles.
- Continuité en 0 : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\left| x^3 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq |x|^3$, et $|x|^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f(0)$ par encadrement. Donc f est continue en 0.
- Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 3x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. De même que précédemment, $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

D'après le TLD, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$. ☐

Question 8 (2 pts)

1. Étudier la convexité/concavité de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$.

   La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f''(x) = -\dfrac{1}{4x^{3/2}}$. Donc pour tout $x > 0$, $f''(x) \leq 0$. La fonction est concave sur $]0, +\infty[$.

2. En déduire que : $\forall x \in]0, +\infty[, \sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

   Comme f est concave sur $]0, +\infty[$ elle est au-dessous de ses tangentes. Or, une équation de la tangente en 1 est $y = \dfrac{1}{2}(x-1) + 1$ donc $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$. Donc $\forall x \in]0, +\infty[$, $\sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$. $\square$

Question 9 (2 pts)

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est 2-lipschitzienne sur $[0, 1]$.
La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| = 2x \leq 2$. D'après l'IAF, pour tout $x, y \in [0, 1]$, $|f(y) - f(x)| \leq 2|y - x|$: la fonction f est bien 2-lipschitzienne sur $[0, 1]$. $\square$

Contrôle de cours 14 - Dérivabilité - Sujet B
Jeudi 13 février 2025

Question 1 (1 pt)

Énoncer le théorème des accroissements finis :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ☐

Question 2 (1 pt)

Énoncer le théorème de Rolle :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur Í$]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$. ☐

Question 3 (1 pt)

Énoncer le théorème de la limite de la dérivée :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell$, alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.
De plus, si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et f' est continue en a.
Si $\ell = \pm\infty$, alors $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale en a. ☐

Question 4 (1 pt)

Énoncer l'inégalité des accroissements finis (version avec des valeurs absolues) :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur Í$]a,b[$ et telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ avec $\forall x \in]a,b[, |f'(x)| \leq M$. Alors $|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$. ☐

Question 5 (1 pt)

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. Alors fg est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Question 6 (1 pt)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Donner la définition de f est concave sur I :
$\forall (a,b) \in I^2, \forall t \in [0,1], f((1-t)a+tb) \geq (1-t)f(a)+tf(b)$ ☐

Question 7 (3 pts)

Justifier que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On va appliquer le théorème de la limite de la dérivée :

- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles.
- Continuité en 0 : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\left|x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq |x|^3$, et $|x|^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f(0)$ par encadrement. Donc f est continue en 0.
- Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$. De même que précédemment, $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

D'après le TLD, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 0$. ☐

Question 8 (2 pts)

1. Étudier la convexité/concavité de $x \mapsto \arctan(x)$ sur $[0, +\infty[$.

   La fonction arctan est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $\arctan''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$. Donc pour tout $x \geq 0$, $\arctan''(x) \leq 0$. La fonction est concave sur $[0, +\infty[$.

2. En déduire que : $\forall x \in [0, +\infty[$, $\arctan x \leq x$.

   Comme arctan est concave sur $[0, +\infty[$ elle est au-dessous de ses tangentes. Or, une équation de la tangente en 0 est $y = x$. Donc $\forall x \in [0, +\infty[$, $\arctan(x) \leq x$. □

Question 9 (2 pts)

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est e-lipschitzienne sur $[0, 1]$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| = \mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^1$. D'après l'IAF, pour tout $x, y \in [0, 1]$, $|f(y) - f(x)| \leq \mathrm{e}|y - x|$: la fonction f est bien e-lipschitzienne sur $[0, 1]$. □