Colles 19 - 03/03/2025 au 07/03/2025

Thèmes traités en classe

- Chapitre 16 : Continuité.
  Exercices traités en classe : I.3, II.3, III.1, III.2, III.3, III.4, III.5, III.7, III.11, III.13, III.14, III.15, III.16.
- Chapitre 17 : Dérivabilité.
  1. Dérivée en un point, dérivée à gauche, dérivée à droite, tangente.
  2. Développement limité à l'ordre 1.
  3. Opérations sur les dérivées, dérivée de la réciproque.
  4. Extrema locaux, points critiques.
  5. Rolle, TAF, IAF.
  6. Caractérisation de la monotonie et de la stricte monotonie.
  7. Limite de la dérivée.
  8. Fonctions lipschitziennes.
  9. Dérivées successives, classe d'une fonction.
  10. Formule de Leibniz.
  11. Fonctions à valeurs complexes.
  12. Convexité.

  Exercices traités en classe : I.1, I.2, I.3, I.4, II.1, II.2, II.6, II.10, IV.1, III.1, III.2, V.1, V.2.
- Chapitre 18 : Polynômes.
  1. Polynômes à une indéterminée, degré.
  2. Opérations sur les polynômes.
  3. Dérivation formelle.
  4. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$: divisibilité, division euclidienne, polynômes irréductibles.

  Exercices traités en classe : I.1, I.3, II.2, II.4.

Questions de cours

Question 1

- C16 Exercice III.14 : Montrer qu'une fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Donner un contre-exemple si la fonction est seulement périodique, puis si elle est seulement continue.
- Théorème de Rolle : énoncé et démonstration.
- Théorème des accroissements finis : énoncé et démonstration.
- Exemple du cours : Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, prolongeable par continuité en 0, dérivable en 0, mais pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Définition de f est convexe et illustration avec un dessin. Énoncer la caractérisation de la convexité pour les fonctions 2 fois dérivables (sans la démonstration). Établir les inégalités : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geq 1 + x$ et $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$.
- Énoncer la formule de Leibniz. Soit $f : x \mapsto \dfrac{e^{3x}}{1+x}$. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et calculer sa dérivée n-ième pour $n \in \mathbb{N}$.
- Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes. Montrer l'unicité.
- Donner les formules pour le degré de la somme, du produit, de la composée de deux polynômes. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $m \in [\![0, \deg(P)]\!]$, alors $\deg(P^{(m)}) = \deg(P) - m$, démonstration.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
  - ▷ Caractérisation séquentielle de la limite.
  - ▷ Limite finie et bornétude.
  - ▷ Passage à la limite dans les inégalités.
  - ▷ Théorème d'encadrement.
  - ▷ Théorème de la limite monotone.
  - ▷ Croissances comparées et o.
  - ▷ Théorème des bornes atteintes.
  - ▷ Théorème des valeurs intermédiaires.
  - ▷ Corollaires du TVI : image d'un intervalle.
  - ▷ Théorème de la bijection monotone.
  - ▷ Dérivabilité et développement limité à l'ordre 1.
  - ▷ Extremum local et dérivée.
  - ▷ Théorème de Rolle.
  - ▷ Théorème des accroissements finis.
  - ▷ Monotonie et dérivée.
  - ▷ Limite de la dérivée.
  - ▷ Inégalité des accroissements finis.
  - ▷ Formule de Leibniz.
  - ▷ Fonction convexe et position des sécantes/tangentes.
  - ▷ Caractérisation de la convexité pour les fonctions deux fois dérivables.
  - ▷ Degré et opérations sur les polynômes.
  - ▷ Degré et dérivation formelle.
  - ▷ Divisibilité et degré.
  - ▷ Théorème de la division euclidienne.

A savoir faire

1. Savoir déterminer une limite avec un encadrement.
2. Savoir manipuler les équivalents et les o.
3. Savoir justifier qu'une fonction est continue sur un intervalle/en un point.
4. Savoir vérifier si une fonction est prolongeable par continuité en un point.
5. Savoir appliquer le TVI, TBA et TBM en vérifiant précisément les hypothèses.
6. Savoir prouver la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle/en un point.
7. Savoir appliquer Rolle, le TAF et l'IAF.
8. Savoir appliquer le théorème de la limite de la dérivée pour vérifier qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$.
9. Savoir appliquer la formule de Leibniz.
10. Savoir appliquer la convexité/concavité pour démontrer des inégalités.
11. Savoir déterminer le degré d'un polynôme.
12. Savoir poser la division euclidienne de deux polynômes.