Correction du Devoir sur temps libre 5

Correction de l'exercice 1 :

1. Supposons par l'absurde que $f-g$ change de signe sur $[a,b]$. Comme elle est continue sur $[a,b]$ (par opérations), alors elle s'annule d'après le TVI, ce qui contredit notre hypothèse.
   Donc $\boxed{f-g \text{ ne change pas de signe sur } [a,b]}$.
2. (a) On pose $h : x \mapsto f(x)-x$. C'est une fonction continue sur $[a,b]$ et $h(a)=f(a)-a \geq 0$ et $h(b)=f(b)-b \leq 0$. Donc d'après le TVI, h s'annule au moins une fois sur $[a,b]$. Donc $\boxed{f \text{ admet au moins un point fixe}}$.

   (b) Comme g est à valeurs dans $[a,b]$, on obtient par une récurrence immédiate que :
   $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ x_n\in[a,b]}$.

   (c)
   - Initialisation : pour $n=0$, comme x_0 est un point fixe de f, on a bien $f(x_0)=x_0$.
   - Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $f(x_n)=x_n$. Alors $f(x_{n+1})=f(g(x_n))=g(f(x_n))=g(x_n)=x_{n+1}$ par HR.

   On conclut par récurrence : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ f(x_n)=x_n}$.

   (d) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n=f(x_n)>g(x_n)=x_{n+1}$. Donc (x_n) est décroissante. Elle est minorée par a, donc (u_n) converge vers une limite ℓ. De plus, comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a\leq x_n\leq b$, en passant à la limite, $a\leq\ell\leq b$.

   (e) Comme f est continue sur $[a,b]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(x_n)=x_n$, on peut passer à la limite et $f(\ell)=\ell$.
   Comme g est continue sur $[a,b]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=g(x_n)$, en passant à la limite, $\ell=g(\ell)$.
   Ainsi, $\boxed{\ell \text{ est un point fixe de } f \text{ et } g}$.

   (f) On obtient alors $f(\ell)=\ell=g(\ell)$, ce qui contredit notre hypothèse de départ.
   Ainsi, $\boxed{\text{il existe } c\in[a,b] \text{ tel que } f(c)=g(c)}$.

Correction de l'exercice 2 :

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur $]0,+\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles.
   Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x)=0=f(0)$, donc f_n est aussi continue en 0.
   $\boxed{f_n \text{ est bien continue sur } [0,+\infty[}$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $x>0$, $\dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=x^{n-1}\ln(x)$. Or,
   - si $n=1$, ce taux d'accroissement tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0 ;
   - si $n>1$, il tend vers 0 par croissances comparées.

   Donc $\boxed{f_n \text{ est dérivable en 0 ssi } n>1}$.
4. D'après la question précédente, pour tout $n>1$, $f_n'(0)=0$. De plus, si $x>0$, $f_n'(x)=nx^{n-1}\ln(x)+x^{n-1}\xrightarrow[x\to0^+]{}0$ par croissances comparées. Donc f_n' est bien continue sur $[0,+\infty[$.
   $\boxed{\text{Pour tout } n>1,\ f_n \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,+\infty[}$.

Correction de l'exercice 3 :

1. Comme le discriminant de x^2-x+1 vaut -3, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2-x+1>0$. Donc $\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$.
2. La fonction f est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles.
   On a $f(0)=1$, et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(a+b\mathrm{e}^x)=a+b$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x^2-x+1}=1$. Ainsi, f est continue en 0 si et seulement si $a+b=1=f(0)$.
   Donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } a+b=1}$.
3. On a donc $a+b=1$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions usuelles. Calculons les dérivées à gauche et à droite en 0 :
   - si $x<0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{a+b\mathrm{e}^x-a-b}{x}=b\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\xrightarrow[x\to0]{}b$. Donc f est dérivable à gauche en 0 et $f_g'(0)=b$;
   - si $x>0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{\sqrt{1+x^2-x}-1}{x}\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{\frac{1}{2}(x^2-x)}{x}\xrightarrow[x\to0]{}-\dfrac{1}{2}$.

   Donc f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\boxed{b=-\frac{1}{2} \text{ et } a=\frac{3}{2}}$ et alors $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

4. Prenons donc $a=\frac{3}{2}$ et $b=-\frac{1}{2}$. Pour $x<0$, $f'(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\frac{1}{2}=f'(0)=-\frac{1}{2}$, donc f' est continue à gauche en 0, et elle est aussi continue sur $]-\infty,0[$ par opérations.
   Pour $x>0$, $f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}=f'(0)$, donc f' est continue à droite en 0, et elle est aussi continue sur $]0,+\infty[$ par opérations.
   Ainsi, $\boxed{f' \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

Correction de l'exercice 4 :

1. Facile !
2. D'après le cours, $\boxed{T_n : y=f'(x_n)(x-x_n)+f(x_n)}$.
   Le point d'intersection de T_n avec Ox a pour coordonnées $(x_{n+1},0)$ et est sur T_n, donc $0=f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)+f(x_n)$.
   On obtient donc $\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$ (car $f'(x_n)\neq 0$).
3. La fonction f est continue sur $[a,b]$, change de signe entre a et b (car $f(a)f(b)<0$) et est strictement croissante sur $[a,b]$ (car $f'>0$). D'après le TVI, il existe un unique $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=0$.
4. (a) Comme f est strictement croissante sur $[a,b]$ et $f(x_0)>f(c)=0$, on a $x_0>c$, donc $\boxed{x_0\in[c,b]}$.

   (b) i. Comme $x_n\geq c$ et f est croissante, $f(x_n)\geq f(c)=0$. Donc $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\geq 0$. Ainsi, $\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\geq x_n}$.

   ii. Comme f est convexe, son graphe est au-dessus de T_n. Donc pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)\geq f'(x_n)(x-x_n)+f(x_n)$.

   iii. On applique l'inégalité précédente à c : $f(c)=0\geq f'(x_n)(c-x_n)+f(x_n)$. On divise par $f'(x_n)>0$: $\boxed{0\geq c-x_n+\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$.

   iv. D'après la question précédente, $0\geq c-x_{n+1}$, donc $x_{n+1}\geq c$.
   D'après la question 4(b)i, $x_{n+1}\leq x_n\leq b$.
   Ainsi, $\boxed{x_{n+1}\in[c,b]}$.

   (c) Par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n\in[c,b]$.
5. La suite (x_n) est minorée par c. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}-x_n=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ et $f(x_n)\geq 0$ car $x_n\in[c,b]$. Donc $x_{n+1}-x_n\leq 0$: la suite (x_n) est décroissante. Elle converge.
6. Notons ℓ la limite de (x_n). Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction g est continue sur $[a,b]$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=g(x_n)$, donc à la limite, $\ell=g(\ell)$ et $0=-\frac{f(\ell)}{f'(\ell)}$. Or, f ne s'annule qu'en c, donc $\boxed{\ell=c}$.
7. (a) Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ et f' ne s'annule pas sur $[a,b]$, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
   De plus, pour tout $x\in[a,b]$, $g'(x)=1-\frac{(f'(x))^2-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}=\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}=\frac{(f(x)-f(c))f''(x)}{(f'(x))^2}$ car $f(c)=0$.

   (b) Comme $(f')^2$ est continue sur $[a,b]$, elle est minorée et atteint son minimum : il existe x_{min} tel que $\forall x\in[a,b]$, $(f'(x))^2\geq (f'(x_{min}))^2=M_1>0$.
   Comme f' et f'' sont continues sur $[a,b]$ elle sont bornées sur $[a,b]$: il existe $M_2,M_3\geq 0$ tels que pour tout $x\in[a,b]$, $|f''(x)|\leq M_2$ et $|f'(x)|\leq M_3$.

   (c) i. Soit $t\in[c,x]$. On applique l'IAF sur $[c,t]$:
   - f est continue sur $[c,t]$;
   - f est dérivable sur $]c,t[$;
   - pour tout $s\in]c,t[$, $|f'(s)|\leq M_3$.

   Donc $|f(t)-f(c)|\leq M_3|t-c|$.

   ii. Pour tout $t\in[c,x]$, $|t-c|\leq|x-c|$, donc $|g'(t)|=|f(t)-f(c)|\frac{|f''(t)|}{(f'(t))^2}\leq\frac{M_3M_2}{M_1}|x-c|$. Donc on pose $K=\frac{M_3M_2}{M_1}$.

   (d) Soit $x\in[c,b]$. On applique l'IAF sur $[c,x]$:
   - g est continue sur $[c,x]$;

- g est dérivable sur $]c, x[$;
- pour tout $t \in]c, x[$, $|g'(t)| \leq K|x-c|$.

Donc $|g(x) - g(c)| \leq K|x-c||x-c|$. Or, $g(c) = c$, donc $|g(x) - c| \leq K|x-c|^2$.

(e) On raisonne par récurrence.