

Développements limités - Exercices

Exercice 1. Déterminer les développements limités suivants :

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $DL_4(0)$ de $x \cos(x) - e^x$
2. $DL_2(0)$ de $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$
3. $DL_4(0)$ de $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$
4. $DL_3(0)$ de $\frac{e^{4x} - 1}{x}$
5. $DL_3\left(\frac{\pi}{6}\right)$ de $\cos(x)$
6. $DL_3(1)$ de $\sqrt{1+x}$ | 7. $DL_4(0)$ de $x e^x \ln(1+x)$
8. $DL_2(0)$ de $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{4+x}}$
9. $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+\sin(x)}$
10. $DL_4(0)$ de $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$
11. $DL_4(0)$ de $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$
12. $DL_4(0)$ de $\ln(1+x^3+x^6)$
13. $DL_5(0)$ de $\sqrt{\cos(x)}$ | 14. $DL_4(0)$ de $\ln\left(1 + \frac{x^2}{1+x}\right)$
15. $DL_4(0)$ de $\arctan\left(\frac{2(1-x)}{1+4x}\right)$
16. $DL_2(0)$ de $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$
17. $DL_2(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{x+e^x}$
18. $DL_2(1)$ de $\frac{x^2-1}{e^x-e}$ |
|---|---|---|

Exercice 2. Déterminer un équivalent simple des suites de termes généraux :

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ | 2. $2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ | 3. $\frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ |
|---|--|---|

Exercice 3. Déterminer les limites suivantes :

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - (1+x)}{x^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\arctan x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$ | 4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\ln x}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{\tan x - x}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{x\sqrt{x} - 1}$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ |
|--|--|--|

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a .

- On suppose que f est dérivable en a . Déterminer la limite de $\frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h}$ lorsque h tend vers 0.
- On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de a . Déterminer la limite de $\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$ lorsque h tend vers 0.

Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $] -\infty, 1[$ par :

$$f(t) = -\frac{\ln(1-t)}{t} \text{ si } t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[, \text{ et } f(0) = 1.$$

- Donner le développement limité de $x \mapsto \ln(1-x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
- En déduire que f est continue en 0.
- f est-elle dérivable en 0? Si oui, préciser le nombre dérivé $f'(0)$.
- Calculer pour tout x de $] -\infty, 0[\cup]0, 1[, f'(x)$.
- Prouver que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$.

Exercice 6. On considère la fonction $g : x \mapsto x^x$.

- Justifier que g est dérivable sur $]0, +\infty[$.
- Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. Est-elle dérivable en 0?
- Dresser le tableau de variations de g .
- Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de g .
- Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 1 pour g .
- Déterminer la position relative de la tangente au point d'abscisse 1 par rapport à la courbe représentative de g .
- Représenter sur l'intervalle $]0, 2]$ la courbe représentative de g et la tangente obtenue précédemment sur le même graphique.
On donne $e^{-1} \approx 0,37$ et $g(e^{-1}) \approx 0,69$.

Exercice 7. 1. Soit $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$. Montrer que f se prolonge en 0 en une fonction dérivable, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en 0.

2. Même question pour la fonction $g(x) = \frac{2x^2}{e^x - e^{-x}}$.

3. Même question pour la fonction $h(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln 2}{x^2 \ln x}$ en 1.

Exercice 8. 1. Soit $f(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique T en $+\infty$, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et T . (On pourra effectuer le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ et faire un développement limité de f lorsque $X \rightarrow 0$).

2. Même question pour la fonction $g(x) = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$.

3. Même question pour la fonction $h(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$.

Exercice 9. 1. Soit I un intervalle contenant 0 et f une solution sur I de l'équation différentielle : $y' = 1 - 2y^2$ vérifiant $f(0) = 1$.

(a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et en déduire que f' admet un DL à tout ordre en 0.

(b) On pose $f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a + bx + cx^2 + o(x^2)$.

i. Déterminer le $DL_3(0)$ de f à l'aide de a, b et c .

ii. Déterminer alors le $DL_2(0)$ de $1 - 2(f(x))^2$.

iii. En déduire les valeurs de a, b et c , puis le $DL_3(0)$ de f .

2. En remarquant que $\tan' = 1 + \tan^2$ déterminer le $DL_5(0)$ de $\tan$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$. On note W sa réciproque.

2. Justifier que W admet un développement limité à tout ordre en 0.

3. Déterminer un $DL_2(0)$ de W .

Exercice 11. Soit $f :]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2 \tan(x) - x$.

1. Montrer que f est une bijection et que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que f^{-1} est impaire.

3. Calculer le $DL_4(0)$ de f^{-1} .

Exercice 12. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. On la note x_n .

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$.

3. Montrer que $x_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ puis que $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Exercice 13. On considère l'équation $x^n = x + n$ pour $n \geq 2$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.

2. Justifier que pour tout $n \geq 2$, $x_n \geq 1$.

3. Justifier que (x_n) converge et déterminer $\lim x_n = \ell$.

4. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$ pour tout $n \geq 2$ et en déduire la monotonie de (x_n) .

5. Montrer que $\ln(x_n) \sim \frac{\ln(n)}{n}$.

6. En déduire un équivalent de $x_n - \ell$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 14. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \ln(n + u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$.

2. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

3. (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n \leq \ln(2n)$.

(b) Montrer que $u_n \sim \ln(n)$.

4. Montrer que $u_n - \ln(n) \sim \frac{\ln(n)}{n}$.