Contrôle de cours 15 - Polynômes - Sujet A
Jeudi 6 mars 2025

Question 1 (1 pt)

Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec B non nul. Il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(R)$. □

Question 2 (1 pt)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}[X]$ une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$. Donner la définition de la multiplicité de α.
La multiplicité de α est le plus grand entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X-\alpha)^m | P$. □

Question 3 (1 pt)

Énoncer la formule de Taylor pour les polynômes.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$. □

Question 4 (1 pt)

Soit $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ dont les n racines sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Exprimer en fonction des coefficients :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \alpha_1 \times \alpha_2 \times \cdots \times \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Question 5 (1 pt)

Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?
Ce sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif. □

Question 6 (1 pt)

Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$?
Ce sont les polynômes de degré 1. □

Question 7 (1 pt)

Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss.
Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet au moins une racine complexe. □

Question 8 (4 pts)

Déterminer toutes les racines du polynôme $P = X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 14X^2 - 15X + 5$, en commençant par chercher une racine évidente et sa multiplicité.
On commence par remarquer que $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P^{(3)}(1) \neq 0$, donc 1 est racine de multiplicité 3 de P. Ainsi $(X-1)^3 | P$.
On pose la division euclidienne de P par $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$, et on trouve un quotient qui vaut $X^2 - 5 = (X-\sqrt{5})(X+\sqrt{5})$.
Ainsi les racines de P sont 1, $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$. □

Question 9 (3 pts)

Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)(x+2)(x+3)}$.

On commence par faire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{(X-1)(X+2)(X+3)} = \dfrac{a}{X-1} +$

$\dfrac{b}{X+2}+\dfrac{c}{X+3}$.

On applique la méthode du cours et on trouve $a=\dfrac{1}{12}$, $b=-\dfrac{1}{3}$ et $c=\dfrac{1}{4}$.

Une primitive est donc $x\mapsto \dfrac{1}{12}\ln|x-1|-\dfrac{1}{3}\ln|x+2|+\dfrac{1}{4}\ln|x+3|$. $\square$

Contrôle de cours 15 - Polynômes - Sujet B
Jeudi 6 mars 2025

Question 1 (1 pt)

Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec B non nul. Il existe un unique couple $(Q,R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(R)$. ☐

Question 2 (1 pt)

Soit $\alpha \in \mathbb{K}[X]$ une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$. Donner la définition de la multiplicité de α.
La multiplicité de α est le plus grand entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X-\alpha)^m | P$. ☐

Question 3 (1 pt)

Énoncer la formule de Taylor pour les polynômes.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$. ☐

Question 4 (1 pt)

Soit $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ dont les n racines sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Exprimer en fonction des coefficients :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \alpha_1 \times \alpha_2 \times \cdots \times \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Question 5 (1 pt)

Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?
Ce sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif. ☐

Question 6 (1 pt)

Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$?
Ce sont les polynômes de degré 1. ☐

Question 7 (1 pt)

Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss.
Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet au moins une racine complexe. ☐

Question 8 (4 pts)

Déterminer toutes les racines du polynôme $P = X^5 - 3X^4 + 8X^2 - 9X + 3$, en commençant par chercher une racine évidente et sa multiplicité.
On commence par remarquer que $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P^{(3)}(1) \neq 0$, donc 1 est racine de multiplicité 3 de P. Ainsi $(X-1)^3 | P$.
On pose la division euclidienne de P par $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$, et on trouve un quotient qui vaut $X^2 - 3 = (X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$.
Ainsi les racines de P sont $1, \sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. ☐

Question 9 (3 pts)

Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x-2)(x+3)}$.

On commence par faire la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(X+1)(X-2)(X+3)} = \frac{a}{X+1} +$

$\dfrac{b}{X-2}+\dfrac{c}{X+3}$.
On applique la méthode du cours et on trouve $a=-\dfrac{1}{6}$, $b=\dfrac{1}{15}$ et $c=\dfrac{1}{10}$.
Une primitive est donc $x\mapsto -\dfrac{1}{6}\ln|x+1|+\dfrac{1}{15}\ln|x-2|+\dfrac{1}{10}\ln|x+3|$. □