Devoir sur temps libre 6

(À remettre le MARDI 25 MARS 2025)

Exercice 1 (Une décomposition en éléments simples).
Soit $P = X^3 - 6X^2 - 19X + 84$. On note x, y et z ses racines dans $\mathbb{C}$.

1. Que valent $x+y+z$ et xyz?
2. On donne $x+y=z$. Déterminer x, y et z.
3. En déduire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{-X^4+6X^3+18X^2-70X-5}{P}$.
4. Soit $n \geq 0$. Calculer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto \dfrac{-x^4+6x^3+18x^2-70x-5}{P(x)}$.

Exercice 2 (Des développements limités).

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ pour $x \neq 1$.
   (a) Justifier que f admet un $DL_2(0)$ et le déterminer.
   (b) En déduire une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 et préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente au voisinage de 0.
   (c) Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique lorsque x tend vers $+\infty$ et préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.
2. Soit $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. Calculer un $DL_3(0)$ de g et représenter l'allure de g au voisinage de 0.

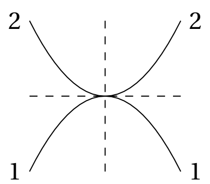
Exercice 3 (Des sev).

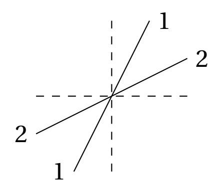
1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \text{ et } 3x - 2z = 0\right\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
3. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid (X-1)^2 \text{ divise } P\}$ et $F = \mathrm{Vect}(1, X)$.
   (a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) Déterminer une base de H.
   (c) Montrer que $F \oplus H = \mathbb{R}_3[X]$ et pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, déterminer sa composante selon F.
4. Soit u, v et w trois suites données par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n, \quad v_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad w_n = n^2.$$
   Montrer que la famille (u, v, w) est libre.

Exercice 4 (Quoi ??).
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On appelle **valuation** de P, et on note $v(P)$, le plus petit entier naturel k tel que $a_k \neq 0$.

1. Montrer que $v(P)$ est égale à la multiplicité de 0 comme racine de P.
2. On suppose que $v(P)$ est paire et non nulle : tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_P$ au voisinage de 0.
3. On suppose que $v(P)$ est impaire : tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_P$ au voisinage de 0.

On se donne deux polynômes $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ qui ont 0 pour racine et on s'intéresse à leurs positions relatives au voisinage de 0 : plus précisément, on suppose que $\mathscr{C}_{P_1}$ est en dessous de $\mathscr{C}_{P_2}$ avant 0 et on se demande comment peut changer cette position relative après 0. Il y a deux cas possibles : soit $\mathscr{C}_{P_1}$ reste en dessous de $\mathscr{C}_{P_2}$ soit la position relative s'inverse. On notera le premier cas $(1,2)$ et le second $(2,1)$ (on lit les numéros des courbes à droite de base en haut) :





4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $v(P_1 - P_2)$ pour que $P_1 - P_2$ change de signe avant et après 0.
5. Justifier que les deux cas peuvent se produire en donnant un exemple pour chacun.

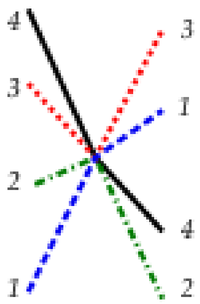
On prend maintenant 3 polynômes $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}[X]$ qui admettent tous 0 pour racine et on suppose que $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x)$ pour $x < 0$ petit. On se pose la même question que précédemment : comment peut varier la position relative des courbes $\mathscr{C}_{P_1}, \mathscr{C}_{P_2}$ et $\mathscr{C}_{P_3}$?

6. Combien y a-t-il de cas à considérer? Faites des dessins.

Tous ces cas sont possibles, on peut le vérifier en donnant un exemple pour chacun.

7. Choisissez vos deux cas préférés et donnez un exemple pour chacun.

On prend maintenant QUATRE polynômes P_1, P_2, P_3 et $P_4 \in \mathbb{R}[X]$ qui admettent tous 0 pour racine et on suppose que $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$ pour $x < 0$ petit. On va montrer que cette fois, il y a une configuration qui n'est pas possible : on ne peut pas avoir $(2, 4, 1, 3)$!



On raisonne par l'absurde. On pose $Q_2 = P_2 - P_1$, $Q_3 = P_3 - P_1$ et $Q_4 = P_4 - P_1$.

8. Justifier que $v(Q_2)$ et $v(Q_4)$ sont impaires et que $v(Q_3)$ est paire.
9. En remarquant que pour $x < 0$ petit on a $0 < Q_2(x) < Q_3(x) < Q_4(x)$, justifier que $0 < \dfrac{Q_2(x)}{Q_3(x)} < 1$ et $1 < \dfrac{Q_4(x)}{Q_3(x)}$ pour $x < 0$ petit.
10. En déduire que que $v(Q_2) \geq v(Q_3) \geq v(Q_4)$.
11. Montrer de la même manière que $v(Q_2) \leq v(Q_4)$.
12. Obtenir une contradiction et conclure.

Exercice 5 (Tchebychev).
Soit (T_n) la suite de polynômes définie par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Calculer T_2, T_3 et T_4.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $Q(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Montrer que $Q = T_n$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n et de degré n et déterminer son coefficient dominant.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ est une racine de T_n.
6. En déduire la factorisation de T_n.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{T_n'}{T_n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - x_k}$.
8. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $f_x : t \mapsto \dfrac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2}$.
   (a) Montrer qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel f_x est définie.
   (b) Montrer que f_x admet un développement limité en 0 à tout ordre.
   On prend $n \geq 2$ et on note $f_x(t) \underset{t \to 0}{=} a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + o(t^n)$.
   (c) Justifier que $a_0 = 1$, $a_1 = x$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $a_k - 2xa_{k-1} + a_{k-2} = 0$.
   On pourra déterminer un développement limité de $(1 - 2xt + t^2) f_x(t)$ en 0 à l'ordre n.
   (d) En déduire que $f_x(t) \underset{t \to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} T_k(x) t^k + o(t^n)$.
   (e) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $t \mapsto \dfrac{2 + t}{1 + t + t^2}$.