Contrôle de cours 16 - DL - Sujet A
Jeudi 13 mars 2025

Question 1 (1 pt)

Énoncer la formule de Taylor-Young.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et $a \in I$. Alors f admet un $DL_n(a)$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + \dfrac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \dots + \dfrac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x-a)^n)$. □

Question 2 (6 pts)

Donner les développements limités usuels en 0 à l'ordre n :

1. $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$
2. $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$
3. $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
4. $\text{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$
5. $\text{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
6. $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o\left(x^n\right)$
7. $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dots - \dfrac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$
8. $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$
9. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$
10. $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right)$
11. $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$
12. (à l'ordre 5) $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)$ □

Question 3 (3 pts)

Déterminer le développement limité de $f : x \mapsto \sqrt{1+x}\ln(1+x)$ à l'ordre 2 en 0. Il suffit de développer $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 1 car le terme prépondérant de $\ln(1+x)$ est x.

$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x + o(x)$ et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Donc $\sqrt{1+x}\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} (1 + x/2 + o(x))(x - x^2/2 + o(x^2)) \underset{x\to 0}{=} x(1 + x/2 + o(x))(1 - x/2 + o(x)) \underset{x\to 0}{=} x(1 + o(x)) \underset{x\to 0}{=} x + o(x^2)$. □

Question 4 (3 pts)

Déterminer le développement limité de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-\sin(x)}$ à l'ordre 3 en 0.

Comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on développe $\dfrac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1+u+u^2+u^3+o(u^3)$ puis on compose. On a besoin de développer sin à l'ordre 3 et de calculer son carré et son cube :

$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - x^3/6 + o(x^3)$

$\sin^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + o(x^3)$

$\sin^3(x) \underset{x\to 0}{=} x^3 + o(x^3)$.

Donc $\dfrac{1}{1-\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + x - x^3/6 + x^2 + x^3 + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + 5x^3/6 + o(x^3)$. □

Contrôle de cours 16 - DL - Sujet B
Jeudi 13 mars 2025

Question 1 (1 pt)

Énoncer la formule de Taylor-Young.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et $a \in I$. Alors f admet un $DL_n(a)$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o((x-a)^n)$. □

Question 2 (6 pts)

Donner les développements limités usuels en 0 à l'ordre n :

1. $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$
2. $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$
3. $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
4. $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$
5. $\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
6. $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$
7. $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$
8. $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$
9. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$
10. $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o\left(x^n\right)$
11. $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$
12. (à l'ordre 5) $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$ □

Question 3 (3 pts)

Déterminer le développement limité de $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} \ln(1-x)$ à l'ordre 2 en 0.

Il suffit de développer $(1+x)^{-1/2}$ à l'ordre 1 car le terme prépondérant de $\ln(1-x)$ est $-x$.

$(1+x)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + o(x)$ et $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Donc $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} (1 - x/2 + o(x))(-x - x^2/2 + o(x^2)) \underset{x\to 0}{=} x(1 - x/2 + o(x))(-1 - x/2 + o(x)) \underset{x\to 0}{=} x(-1 + o(x)) \underset{x\to 0}{=} -x + o(x^2)$. □

Question 4 (3 pts)

Déterminer le développement limité de $f : x \mapsto e^{\sin(x)}$ à l'ordre 3 en 0.

Comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on développe $e^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+u^2/2+u^3/6+o(u^3)$ puis on compose. On a besoin de développer sin à l'ordre 3 et de calculer son carré et son cube :

$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - x^3/6 + o(x^3)$

$\sin^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + o(x^3)$

$\sin^3(x) \underset{x\to 0}{=} x^3 + o(x^3)$.

Donc $e^{\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + x - x^3/6 + x^2/2 + x^3/6 + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2/2 + o(x^3)$. □