Dénombrement - Exercices

Exercice 1. Dans un camp de vacances hébergeant 80 personnes, 55 personnes pratiquent la natation, 33 le tennis, et 16 personnes ne pratiquent aucun de ces deux sports. Combien de personnes pratiquent à la fois le tennis et la natation ?

Exercice 2. Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E. On note $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$. Justifier que $A\Delta B$ est fini et déterminer son cardinal en fonction de ceux de A, B et $A\cap B$.

Exercice 3. Combien peut-on former de codes comportant 3 lettres distinctes, suivies de deux chiffres distincts ? *Exemple : (BAC 07).*

Exercice 4. Dénombrer les anagrammes du mot « camion » puis les anagrammes du mot « ananas ».

Exercice 5. À l'écrit d'un examen, on doit traiter 8 exercices au choix parmi 10.

1. Combien y a-t-il de choix possibles ?
2. Même question sachant que les deux premiers exercices sont obligatoires.

Exercice 6. Pour ouvrir la porte de mon immeuble, j'utilise un code de cinq chiffres distincts. Les chiffres sont identifiables (par exemple grâce aux traces de doigts...). À raison d'un essai toutes les trente secondes, quel temps un cambrioleur mettra-t-il au maximum pour ouvrir ma porte ?

Exercice 7. On souhaite écrire un code de 4 chiffres avec les chiffres $1, 2, 3, 4$ et 5. Combien y a-t-il de codes :

1. au total ?
2. avec 2 fois le 1 ?
3. avec 4 chiffres impairs ?
4. avec 4 chiffres différents ?
5. avec 2 fois le 1 et 2 fois le 2 ?
6. avec 4 chiffres dans l'ordre strictement croissant ?

Exercice 8. On tire deux cartes sans remise dans un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de tirages :

1. en tout ?
2. avec au moins un roi ?
3. avec au moins un coeur ?
4. avec au moins un roi ou un coeur ?
5. avec au moins un roi et au moins un coeur ?
6. avec exactement un roi ?

Exercice 9. Soit n et p deux entiers strictement positifs. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

Exercice 10. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de surjections de $\{1,2,\dots,n+1\}$ dans $\{1,2,\dots,n\}$?

Exercice 11.

1. Calculer les nombres suivants puis vérifier en utilisant le triangle de Pascal :
   (a) $\binom{7}{0}$ (b) $\binom{7}{3}$ (c) $\binom{7}{4}$ (d) $\binom{35}{33}$
2. Simplifier $\dfrac{\binom{n+1}{p}}{\binom{n}{p}}$
3. Développer : (a) $(2x-1)^5$ (b) $(a+2b)^4$ (c) $(1-\sqrt{3})^5$
4. Calculer les sommes suivantes : (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k5^{n-k}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k$ (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{2k}3^k$

Exercice 12.

1. Un groupe de n personnes souhaite former une équipe de p joueurs avec 1 capitaine. Compter de 2 façons différentes le nombre d'équipe possibles.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}p\binom{n}{p}$.

Exercice 13. Soit E un ensemble de cardinal n. Montrer qu'il y a autant de parties de E qui sont de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

Exercice 14.

1. Soit $n\geq 1$. Un tournoi de tennis a $2n$ participants. On note $N(n)$ le nombre de façons d'apparier les joueurs au premier tour. Déterminer une relation entre $N(n)$ et $N(n-1)$ et en déduire l'expression de $N(n)$.
2. Soit E un ensemble de cardinal np avec $n,p\in\mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de partitions de E en parties de taille p.

Exercice 15. Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $n \leq p+q$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. De combien de façons peut-on choisir simultanément n entiers entre 1 et $p+q$ tels que exactement k d'entre eux sont inférieurs ou égaux à p ?
2. En déduire l'identité de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$.

Exercice 16. Ma playlist Spotify comprend n morceaux ($n \geq 1$). Ces n morceaux sont en fait p répétitions de mon préféré et $n-p$ répétitions d'un autre. J'écoute ma playlist en mode random.

1. Combien y a-t-il de façons d'écouter ma playlist ?

Je m'arrête d'écouter dès que j'ai écouté toutes les répétitions de mon morceau préféré.

2. Soit $k \in [\![p, n]\!]$. Combien de façons d'écouter ma playlist me permettent de m'arrêter après exactement k morceaux ?
3. En déduire la formule : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.

Exercice 17.
1. Montrer qu'il existe deux ensembles de 10 entiers dans $[\![1, 100]\!]$ qui ont la même somme.
2. On prend une partie E de $[\![1, 100]\!]$ de cardinal 10. Montrer qu'il existe deux sous-ensembles non vides et disjoints de E qui ont la même somme.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $I \subset [\![1, n]\!]$ non vide tel que $\displaystyle\sum_{i \in I} a_i$ est divisible par n.

Exercice 19. Soit E un ensemble à n éléments. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties telles que $A \subset B$ (on pourra, par exemple, essayer avec $n = 3$).

Exercice 20. Soit $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un ensemble à n éléments ($n \geq 2$), p un entier compris entre 2 et n.

1. Dénombrer les parties de E à p éléments qui contiennent :

   a) x_1 et x_2 b) x_1 mais pas x_2 c) x_2 mais pas x_1 d) Ni x_1 ni x_2

2. En déduire la relation $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$.
3. Retrouver ce dernier résultat par le calcul.

Exercice 21.
1. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Déterminer le cardinal de l'ensemble

$$\left\{(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3 \mid A \cup B \cup C = E\right\}$$

2. En s'inspirant de la démonstration ensembliste de la formule de Newton, démontrer la formule

$$(a+b+c)^n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j} a^i b^j c^{n-i-j}.$$

Exercice 22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n.

1. Calculer $S = \displaystyle\sum_{X \in \mathscr{P}(E)} \operatorname{card}(X)$.
2. On pose $U = \displaystyle\sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2} \operatorname{card}(X \cup Y)$, $V = \displaystyle\sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2} \operatorname{card}(X \cap Y)$ et $W = \displaystyle\sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2} \operatorname{card}(X \cap \overline{Y})$.
   Calculer $U + V$ et $V + W$ et en déduire U, V et W.