Colles 22 - 24/03/2025 au 28/03/2025

Thèmes traités en classe

- Chapitre 19 : Développements limités.
  Exercices traités en classe : 1, 5, 7, 8, 10.
- Chapitre 20 : Espaces vectoriels.
  1. Définition et exemples importants.
  2. Combinaisons linéaires.
  3. Sous-espaces vectoriels : définition, exemples.
  4. Intersection de sev, sev engendré par une famille finie de vecteurs.
  5. Famille génératrice, famille libre/liée, base.

  Exercices traités en classe : I.1, I.2, I.3, II.1, II.8, II.9.

Questions de cours

Question 1

- Développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ en 0 à l'ordre n, avec la démonstration.
- Énoncer la formule de Taylor-Young avec ses hypothèses. Retrouver le DL de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ en 0.
- Déterminer le $DL_5(0)$ de tan : à partir de $\dfrac{\sin}{\cos}$ puis en primitivant le $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
- C19 Exercice 5 : On considère $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ donnée par $f(0) = 0$ et $f(t) = -\dfrac{\ln(1-t)}{t}$ pour $t \neq 0$.
  1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.
  2. En utilisant le $DL_2(0)$ de $x \mapsto \ln(1-x)$, justifier que f est dérivable en 0.
  3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire $AX = 0$ (avec $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$) est un sev de $\mathbb{K}^p$. Illustration avec le cas des droites vectorielles du plan et des plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
- L'intersection d'une famille de sev est un sev.
- Sev engendré par $(u_1, \dots, u_p)$: définition et démonstration que c'est un sev.
- Une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ échelonnée en degré est libre. Démonstration par l'absurde.
- Exemples du cours :
  1. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On pose pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $L_i = \dfrac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (X - a_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (a_i - a_k)}$. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
  2. Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille $(1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- C20 Exercice II.8 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.
  1. Montrer que F est un sev de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
  2. Déterminer une base de F.
- Donner la définition de famille libre et famille génératrice. Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ base de F et $\mathscr{G} = (v_1, \dots, v_p)$ base de G. C20 Exercice II.9 : soit $f : x \mapsto \sin(x)$ et $g : x \mapsto \cos(x)$. Montrer que (f, g) est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
  - ▷ $DL(0)$ et parité.
  - ▷ Théorème de primitivation des DL.
  - ▷ Formule de Taylor-Young.
  - ▷ Condition pour rajouter un vecteur à un Vect sans changer le Vect.
  - ▷ Condition nécessaire et suffisante pour rajouter un vecteur à une famille libre et rester libre.
  - ▷ Famille de polynômes échelonnés en degrés.

A savoir faire

1. Connaître ses DL usuels et savoir calculer un DL.
2. Savoir utiliser un DL pour calculer une limite/étudier une tangente/une asymptote.
3. Savoir montrer qu'une partie d'un $\mathbb{K}$-ev est un sev.
4. Savoir vérifier qu'une famille est libre/liée, génératrice ou non, une base ou non.
5. Savoir écrire un sev comme un Vect pour trouver une base.