Correction du Devoir sur temps libre 6

Correction de l'exercice 1 :

1. Formules coefficients-racines : $x+y+z=-\dfrac{-6}{1}=6$ et $xyz=(-1)^3\dfrac{84}{1}=-84$.
2. On obtient $x+y+z=2z=6$, donc $z=3$. Puis, on fait la division euclidienne de P par $X-3$: $P=(X-3)(X^2-3X-28)$. Le discriminant du polynôme du second degré est 121, donc ses racines sont $\dfrac{3\pm 11}{2}=7$ et -4. Ainsi, $\boxed{x=-4,\ y=7 \text{ et } z=3}$.
3. On a $P=(X+4)(X-7)(X-3)$. On commence par faire la division euclidienne de $-X^4+6X^3+18X^2-70X-5$ par P : $-X^4+6X^3+18X^2-70X-5=-XP-X^2+14X-5$. On a donc
$$\frac{-X^4+6X^3+18X^2-70X-5}{P}=-X+\frac{-X^2+14X-5}{(X+4)(X-7)(X-3)}=-X+\frac{a}{X+4}+\frac{b}{X-7}+\frac{c}{X-3}.$$
On utilise la méthode du cours pour trouver $a=-1$, $b=1$ et $c=-1$.
4.
   - Pour $n=0$, $f^{(0)}:x\mapsto -x-\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{x-7}-\dfrac{1}{x-3}=-x-(x+4)^{-1}+(x-7)^{-1}-(x-3)^{-1}$;
   - Pour $n=1$, $f^{(1)}:x\mapsto -1+(x+4)^{-2}-(x-7)^{-2}+(x-3)^{-2}$;
   - Pour $n\geq 2$, $f^{(n)}:x\mapsto (-1)^n n!(x+4)^{-n+1}+(-1)^{n+1}n!(x-7)^{-n+1}+(-1)^n n!(x-3)^{-n+1}$.

Correction de l'exercice 2 :

1. (a) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par opérations sur les fonctions usuelles. Donc d'après Taylor-Young, f admet un $DL_2(0)$.

   Comme on a un x en facteur, il suffit de développer $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x-1}$ à l'ordre 1.

   On a $\sqrt{1+u}\underset{u\to 0}{=}1+\dfrac{1}{2}u+o(u)$, donc $\sqrt{1+x^2}\underset{x\to 0}{=}1+o(x)$.

   Puis, $\dfrac{1}{x-1}\underset{x\to 0}{=}-1-x+o(x)$.

   Donc $f(x)\underset{x\to 0}{=}x(1+o(x))(-1-x+o(x))\underset{x\to 0}{=}x(-1-x+o(x))$ et $\boxed{f(x)\underset{x\to 0}{=}-x-x^2+o(x^2)}$.

   (b) La tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 a pour équation $y=-x$. Comme le coefficient de degré 2 est -1, la courbe est en dessous de sa tangente au vosinage de 0.

   (c) On pose $x=\dfrac{1}{y}$ et on cherche un développement asymptotique lorsque $y\to 0^+$:
$$\frac{\sqrt{1+y^2}}{y(1-y)}\underset{y\to 0}{=}\frac{1}{y}(1+y^2/2+o(y^2))(1+y+y^2+o(y^2))\underset{y\to 0}{=}\frac{1}{y}(1+y+3y^2/2+o(y^2))\underset{y\to 0}{=}\frac{1}{y}+1+\frac{3y}{2}+o(y).$$
   Donc $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}x+1+\dfrac{3}{2x}+o(1/x)$: l'asymptote a pour équation $y=x+1$ et la courbe est au-dessus de l'asymptote car $\dfrac{3}{2x}>0$ lorsque $x\to+\infty$.

2. On a $g(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+(e^x-1)/2}$. On pose $u(x)=\dfrac{e^x-1}{2}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{x}{2}$, donc
$$\frac{1}{2}\frac{1}{1+u}\underset{u\to 0}{=}\frac{1}{2}(1-u+u^2-u^3+o(u^3)).$$
   De plus,
   - $u(x)\underset{x\to 0}{=}\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{12}+o(x^3)$,
   - $u(x)^2\underset{x\to 0}{=}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{4}+o(x^3)$,
   - $u(x)^3\underset{x\to 0}{=}\dfrac{x^3}{8}+o(x^3)$.

   Donc $g(x)\underset{x\to 0}{=}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^3}{12}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{4}-\dfrac{x^3}{8}+o(x^3)\right)$ donc $\boxed{g(x)\underset{x\to 0}{=}\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^3}{48}+o(x^3)}$. On trace bien la tangente $y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{4}$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de la tangente pour $x<0$ puis au-dessus pour $x>0$. On a un point d'inflexion en 0.

Correction de l'exercice 3 :

1. - La matrice nulle est dans F car $A0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}A$.
   - Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $$A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A$$
   car M et N sont dans F. Donc $\lambda M + N \in F$.

   Ainsi, $\boxed{F \text{ est un sev de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.
2. On sait déjà que G est un sev de $\mathbb{R}^3$ car c'est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. On va de plus l'écrire comme un Vect.
$$\begin{aligned} G &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x \text{ et } z = \frac{3}{2}x\right\} \\ &= \left\{\left(x, x, \frac{3}{2}x\right), \text{ avec } x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\left(1, 1, \frac{3}{2}\right)\right). \end{aligned}$$
   Donc le vecteur $\left(1, 1, \frac{3}{2}\right)$ forme une famille génératrice de G. C'est aussi une famille libre car c'est un vecteur non nul.

   Ainsi, le vecteur $\boxed{\left(1, 1, \frac{3}{2}\right) \text{ est une base de } G}$.
3. (a) - Le polynôme $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ est dans H car $P = (X-1)^2 0_{\mathbb{R}[X]}$.
   - Soient $P, Q \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = (X-1)^2 A$ et $Q = (X-1)^2 B$. On a
   $$\lambda P + Q = \lambda (X-1)^2 A + (X-1)^2 Q = (X-1)^2(\lambda A + B)$$
   donc $(X-1)^2 | \lambda P + Q$. Donc $\lambda P + Q \in H$.

   Ainsi, $\boxed{H \text{ est un sev de } \mathbb{R}_3[X]}$.

   (b) On commence par chercher une famille génératrice de H. On peut soit remarquer que $(X-1)^2 | P$ est équivalent à $P(1) = P'(1) = 0$ et poser les deux équations avec des coefficients.
   Une autre manière consiste à prendre $P \in \mathbb{R}_3[X]$, puis $P \in H \iff \exists Q \in \mathbb{R}_1[X] \mid P = (x-1)^2 Q \iff \exists a, b \in \mathbb{R} \mid P = (X-1)^2(aX + b) = aX(X-1)^2 + b(X-1)^2$. Donc $H = \mathrm{Vect}((X-1)^2, X(X-1)^2)$.
   Donc la famille $((X-1)^2, X(X-1)^2)$ est génératrice pour H. Comme c'est une famille de polynômes échelonnée en degrés, elle est aussi libre.
   D'où $\boxed{((X-1)^2, X(X-1)^2) \text{ est une base de } H}$.

   (c) On fait la somme directe même si ce n'est pas nécessaire. Soit $P \in F \cap H$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P = aX + b$. De plus, $P(1) = 0$ donc $a + b = 0$ et $P'(1) = 0$, donc $a = 0$. D'où $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Ainsi $\boxed{F \cap H = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}}$ et les deux sev sont en somme directe.
   Bon, en fait on va tout démontrer d'un coup. On peut faire une analyse-synthèse, mais ici, il y a une remarque importante à faire : soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. En faisant la division euclidienne de P par $(X-1)^2$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_1[X]$ et $R \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que $P = (X-1)^2 Q + R$. On a alors $(X-1)^2 Q \in H$ et $R \in F$. Donc $H \oplus F = \mathbb{R}_3[X]$.
   On doit maintenant déterminer R : on pose $R = aX + b$ et on a $R(1) = a + b = P(1)$ et $R'(1) = a = P'(1)$. Donc $b = P(1) - P'(1)$. Autrement dit $\boxed{R = P'(1)X + P(1) - P'(1) \text{ est la composante de } P \text{ selon } F}$.
4. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tels que :
$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$$
   En particulier, pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$:
$$\begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 \\ 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$
   Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (u, v, w) \text{ est libre}}$.

Correction de l'exercice 4 :

1. On note $p = v(P)$. On a donc $P = a_p X^p + \cdots + a_n X^n = X^p(a_p + \cdots + a_n X^{n-p})$ et le polynôme $a_p + \cdots + a_n X^{n-p}$ ne s'annule pas en 0. Donc $\boxed{p \text{ est bien la multiplicité de 0 comme racine de } P}$.

2. Ici, il faut bien voir que l'allure au voisinage de 0 est donné par un équivalent de P en 0. Or, $P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$. Il y a deux cas possibles : ça ressemble à $x \mapsto x^2$ ou à $x \mapsto -x^2$.
3. Idem, $x \mapsto x$ ou bien $x \mapsto -x$.
4. On a vu dans les deux questions précédentes, que $P_1 - P_2$ va changer de signe en 0 ssi $\boxed{v(P_1 - P_2) \text{ est impair}}$.
5. On peut prendre $P_1 = -X^2$, $P_2 = X^2$ pour le premier cas et $P_1 = 2X$ et $P_2 = X$ pour le second.
6. Il y a $\boxed{6 \text{ cas}}$ à considérer : $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ et $(3,2,1)$.
7. Les deux premiers par exemple : $P_1 = -X^2$, $P_2 = 0$ et $P_3 = X^2$ et le deuxième $P_1 = -X^2$, $P_2 = 0$ et $P_3 = X^3$ (on regarde juste les valuations des différences).
8. Comme on raisonne par l'absurde, on suppose que $P_2(x) < P_4(x) < P_1(x) < P_3(x)$ pour $x > 0$ petit. Ainsi, $Q_2(x) < 0$ et $Q_4(x) < 0$ pour $x > 0$ petit : ils changent de signe en 0, donc $\boxed{v(Q_2) \text{ et } v(Q_4) \text{ sont impaires}}$. Par contre, $Q_3(x) > 0$ pour $x > 0$ petit : Q_3 ne change pas de signe donc $\boxed{v(Q_3) \text{ est paire}}$.
9. Comme $Q_3(x) > 0$ pour $x < 0$ petit, on peut diviser les inégalités suggérées par $Q_3(x)$ pour obtenir $\boxed{0 < \dfrac{Q_2(x)}{Q_3(x)} < 1}$ et $\boxed{1 < \dfrac{Q_4(x)}{Q_3(x)} \text{ pour } x < 0 \text{ petit}}$.
10. Notons $p_2 = v(Q_2)$, $p_3 = v(Q_3)$ et $p_4 = v(Q_4)$. On a $\dfrac{Q_2(x)}{Q_3(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{a_{p_2}}{a_{p_3}} x^{p_2 - p_3}$, et $Q_4(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{a_{p_4}}{a_{p_3}} x^{p_4 - p_3}$. En utilisant les inégalités de la question précédente, on a $p_2 - p_3 \geq 0$ et $\boxed{v(Q_2) \geq v(Q_3)}$, puis $p_4 - p_3 \leq 0$ et $\boxed{v(Q_3) \geq v(Q_4)}$.
11. Comme pour $x > 0$ petit, $Q_2(x) < Q_4(x) < 0$, on obtient $0 < \dfrac{Q_4(x)}{Q_2(x)} < 1$, donc $v(Q_2) \geq v(Q_4)$.
12. On a donc $v(Q_2) = v(Q_3) = v(Q_4)$: un nombre impair est égal à un nombre pair !! Ainsi $\boxed{(2,4,1,3) \text{ ne peut pas arriver}}$.

Correction de l'exercice 5 :

1. On utilise la formule de récurrence : $\boxed{T_2 = 2X^2 - 1}$, $\boxed{T_3 = 4X^3 - 3X}$ et $\boxed{T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1}$.
2. On procède par récurrence.
   - Initialisation : pour $n = 0$, on a $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0 \times \theta)$ et pour $n = 1$, on a $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et $T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)$.
     Alors $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)\, T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) \\
&= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\
&= 2\cos(\theta)(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)) - \cos(n\theta) \\
&= 2\cos^2(\theta)\cos(n\theta) - \sin(2\theta)\sin(n\theta) - \cos(n\theta) \\
&= (\cos(2\theta) + 1)\cos(n\theta) - \sin(2\theta)\sin(n\theta) - \cos(n\theta) \\
&= \cos(2\theta)\cos(n\theta) - \sin(2\theta)\sin(n\theta) \\
&= \cos((n+2)\theta).
\end{aligned}$$

   On conclut par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)}$.
3. Comme la fonction cos est surjective sur $[-1,1]$, on a pour tout $y \in [-1,1]$, $T_n(y) = Q(y)$. Le polynôme $Q - T_n$ a une infinité de racines : c'est le polynôme nul. Autrement dit, $\boxed{Q = T_n}$.
4. Pour $n = 0$, $\deg(T_0) = 1$ et son coefficient dominant est 1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\deg(T_n) = n$ et son coefficient dominant est 2^{n-1}.
   - Initialisation : pour $n = 1$, $\deg(T_1) = 1$ et son coefficient dominant est $1 = 2^{1-1}$. Pour $n = 2$, $\deg(T_2) = 2$ et son coefficient dominant est $2 = 2^{2-1}$.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\deg(T_n) = n$ et son coefficient dominant est 2^{n-1} et que $\deg(T_{n+1}) = 2^n$. Alors $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$, et $\deg(2XT_{n+1}) = n+2$ et $\deg(T_n) = n$, donc $\deg(T_{n+2}) = n+2$. De plus, le coefficient dominant vaut $2 \times 2^n = 2^{n+1}$.

   Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n \text{ est de degré } n \text{ et son coefficient dominant est } 2^{n-1}}$.
5. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a $T_n(x_k) = \cos\left(n\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Donc $\boxed{x_k \text{ est bien racine de } T_n}$.

6. On remarque que si $k \neq k' \in [\![0, n-1]\!]$, alors $x_k \neq x_{k'}$ car cos est injective sur $[0, \pi]$. Donc $x_0, \dots, x_{n-1}$ sont n racines distinctes de T_n. Comme $\deg(T_n) = n$, il n'y a pas d'autre racines : $\boxed{T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)}$.

7. En dérivant l'expression précédente, $T'_n = 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n-1} (X - x_j)$, donc $\dfrac{T'_n}{T_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\prod_{j=0, j\neq k}^{n-1} (X - x_j)}{\prod_{j=0}^{n-1} (X - x_j)}$ et $\boxed{\dfrac{T'_n}{T_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{X - x_k}}$.

8. (a) En posant $g : t \mapsto 1 + 2xt + t^2$, on a $g(0) = 1$. Donc par continuité de g, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in]-\alpha, \alpha[$, $g(\alpha) > 0$ et $\boxed{f_x \text{ est définie sur }]-\alpha, \alpha[}$.

   (b) La fonction f_x est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $-]\alpha, \alpha[$, donc elle admet un DL à tout ordre en 0 d'après Taylor-Young.

   (c) On a $(1 - 2xt + t^2) f_x(t) = 1 - xt$ donc :

$$
\begin{aligned}
1 - xt &\underset{t\to 0}{=} (1 - 2xt + t^2)(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k + o(t^n)) \\
&\underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k t^k - 2x \sum_{k=0}^{n} a_k t^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k t^{k+2} + o(t^n) \\
&\underset{t\to 0}{=} a_0 + a_1 t - 2x a_0 t + \sum_{k=2}^{n} (a_k - 2x a_{k-1} + a_{k-2}) + o(t^n)
\end{aligned}
$$

   Par unicité du DL, on obtient $\boxed{a_0 = 1}$, $a_1 - 2x a_o = -x$ donc $\boxed{a_1 = x}$ puis pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\boxed{a_k - 2x a_{k-1} + a_{k-a2} = 0}$.

   (d) Par récurrence immédiate, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0, n]\!],\ a_k = T_k(x)}$.

   (e) On prend $x = -\frac{1}{2}$ et on cherche le DL de $2 f_{-\frac{1}{2}}(t)$ en 0 à l'ordre 4. Comme $T_0\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, $T_1\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, $T_2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, $T_3\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, $T_4\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, on a donc $\boxed{\dfrac{2+t}{1+t+t^2} \underset{t\to 0}{=} 2 - t - t^2 + 2t^3 - t^4 + o(t^4)}$.