

Colles 23 - 31/03/2025 au 04/04/2025**Thèmes traités en classe**

- Chapitre 20 : Espaces vectoriels.
 1. Définition et exemples importants.
 2. Combinaisons linéaires.
 3. Sous-espaces vectoriels : définition, exemples.
 4. Intersection de sev, sev engendré par une famille finie de vecteurs.
 5. Famille génératrice, famille libre/liée, base.
 6. Somme de deux sev.
 7. Somme directe, supplémentaires.

Exercices traités en classe : I.1, I.2, I.3, II.1, II.8, II.9, II.4, II.5, II.10, III.1, III.2, III.3, III.4, III.5, III.7, III.8.

- Chapitre 21 : Dénombrement.
 1. Cardinal d'un ensemble fini, cardinal d'une partie.
 2. Injectivité/surjectivité/bijektivité et cardinal.
 3. Cardinal d'une union, du complémentaire, du produit cartésien.
 4. Nombre d'applications de E dans F .
 5. Nombre de p -listes, de p -arrangements, de permutations.
 6. Nombre de p -combinaisons, retour sur les coefficients binomiaux.

Exercices traités en classe : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14.

Questions de cours**Question 1**

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire $AX = 0$ (avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$) est un sev de $\mathbb{K}^p$. Illustration avec le cas des droites vectorielles du plan et des plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
- L'intersection d'une famille de sev est un sev.
- Sev engendré par $(u_1, \dots, u_p)$: définition et démonstration que c'est un sev.
- Une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ échelonnée en degré est libre. Démonstration par l'absurde.
- Exemples du cours :

1. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On pose pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_i = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (X - a_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (a_i - a_k)}$. Montrer que

$(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2. Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

- C20 Exercice II.8 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

1. Montrer que F est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de F .

- Donner la définition de famille libre et famille génératrice. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ base de F et $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_p)$ base de G . C20 Exercice II.9 : soit $f : x \mapsto \sin(x)$ et $g : x \mapsto \cos(x)$. Montrer que (f, g) est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Définition de la somme de deux sev et de somme directe. Montrer que la somme de deux sev est un sev.
- Donner la définition de famille libre et famille génératrice. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ base de F et $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_p)$ base de G . Donner les conditions sur $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ pour que F et G soient en somme directe/supplémentaires.
- Montrer que F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$.
- Définition de supplémentaires. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Définition de p -listes, de p -arrangements et de p -combinaisons. Donner les formules. Justifier la formule pour les p -combinaisons à l'aide du principe des bergers.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
 - ▷ Condition pour rajouter un vecteur à un Vect sans changer le Vect.
 - ▷ Condition nécessaire et suffisante pour rajouter un vecteur à une famille libre et rester libre.
 - ▷ Famille de polynômes échelonnés en degrés.
 - ▷ Condition nécessaire et suffisante pour que F et G soient en somme directe.
 - ▷ Si $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ et $G = \text{Vect}(u_{k+1}, \dots, u_n)$, conditions suffisantes sur $(u_1, \dots, u_n)$ pour que $F + G = E$, F et G soient en somme directe et $F \oplus G = E$.
 - ▷ Principe des tiroirs.
 - ▷ Cardinal d'une union.
 - ▷ Principe des bergers.
 - ▷ Cardinal d'un produit cartésien.
 - ▷ Nombre d'applications de E dans F .
 - ▷ Nombre d'arrangements.
 - ▷ Nombre de permutations.
 - ▷ Nombre de combinaisons.
 - ▷ Formules sur les coefficients binomiaux.

A savoir faire

1. Savoir montrer qu'une partie d'un $\mathbb{K}$ -ev est un sev.
2. Savoir vérifier qu'une famille est libre/liée, génératrice ou non, une base ou non.
3. Savoir écrire un sev comme un Vect pour trouver une base.
4. Savoir montrer que deux sev sont en somme directe.
5. Savoir montrer que deux sev sont supplémentaires en utilisant une analyse-synthèse.
6. Connaître les formules de dénombrement.
7. Savoir modéliser une situation de dénombrement par des tirages successifs avec/sans remise ou simultanés.