Devoir sur temps libre 7

(À remettre le LUNDI 28 AVRIL 2025)

Exercice 1 (Des boules).
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en choisit 3 au hasard et simultanément.

1. Quel est, en fonction de n, le nombre de tirages possibles ?
2. Dans le cas où $n = 9$, calculer le nombre de tirages où le plus petit numéro est 4.
3. On fixe un entier $k \in \{1, \dots, n-2\}$. Quel est le nombre de tirages où le plus petit numéro est k ?
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \binom{n-k}{2} = \binom{n}{3}$ pour $n \geq 3$.

Exercice 2 (Des boules de couleur pour changer).
Une urne contient quatre boules rouges, quatre boules blanches et quatre boules noires. On tire simultanément quatre boules dans l'urne.

1. On suppose dans un premier temps que les boules d'une même couleur sont indiscernables.
   (a) Combien y a-t-il de tirages unicolores différents ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages bicolores différents ?
   (c) Combien y a-t-il de tirages tricolores différents ?
2. On suppose maintenant que les boules de chaque couleur sont numérotés de 1 à 4.
   (a) Combien y a-t-il de tirages unicolores différents ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages bicolores différents ?
   (c) Combien y a-t-il de tirages tricolores différents ?

Exercice 3 (Lagrange pour changer).
Soit $n \geq 1$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ où les a_i sont deux à deux distincts. On pose pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$L_i = \frac{\displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (X - a_j)}{\displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (a_i - a_j)} \quad \text{et} \quad \pi_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j).$$

1. Dans cette question, on prend $n = 3$ et $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.
   Expliciter L_0, L_1, L_2 et L_3 sous forme factorisée.
2. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_i.
3. Soit $i, k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $L_i(a_k)$.
4. Montrer que la famille $\mathscr{L} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Justifier que les coordonnées de P dans la base $\mathscr{L}$ sont $(P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$.

Dans la fin de l'exercice on pose pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $a_i = i$.

6. Montrer que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, le coefficient dominant de L_i est $\dfrac{(-1)^{n-i}}{n!}\dbinom{n}{i}$.
7. Justifier qu'il existe un unique polynôme $R \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $R(i) = i^n$.
8. Donner deux expressions de R et en déduire une simplification de : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^n$.

Exercice 4 (Des matrices).
Soit $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées 2×2 à coefficients réels. On note :

- F l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients diagonaux est nulle ;
- $G = \{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) / \forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), AM = MA\}$
- $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ puis déterminer une base de F.
2. (a) Donner deux matrices simples de G.

(b) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient à G si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,2]\!]^2, \quad AE_{ij} = E_{ij}A.$$

(d) Soit $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$
Calculer AE_{ij} et $E_{ij}A$ pour tout $(i,j) \in [\![1,2]\!]^2$.

(e) En déduire que A est de la forme $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

(f) Donner une base de G.

3. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5 (On choisit pas sa famille).
Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$.

1. (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(x) = 0$. Que peut-on dire de P ?

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre.
   On pourra utiliser la question précédente.

   (c) L'espace vectoriel E est-il de dimension finie ? Justifier.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $F = \mathrm{Vect}(f_0, \dots, f_n)$.

   (a) Quelle est la dimension de F ?

   (b) Montrer que la fonction cosinus hyperbolique n'est pas un élément de F.
   On pourra raisonner par l'absurde et regarder une limite bien choisie.

   (c) Quelle est la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathrm{ch}, f_0, \dots, f_n)$?

Exercice 6 (Pile je gagne). On lance un pièce truquée qui a probabilité $\frac{2}{3}$ de donner pile. Les lancers sont successifs et indépendants.
Pour répondre aux questions suivantes, on introduira les événements nécessaires pour justifier.

1. Quelle est la probabilité qu'on obtienne deux piles aux deux premiers lancers ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir FFP lors des trois premiers lancers ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir $PPFF$ lors des quatre premiers lancers ?
4. Calculer la probabilité conditionnelle d'obtenir pile au deuxième lancer sachant qu'on a obtenu un pile et deux faces (pas forcément dans cet ordre) lors des trois premiers lancers.
5. Pour tout $n \geq 2$, on note A_n : « on obtient pour la première fois deux piles successifs aux lancers numéros $n-1$ et n » et on pose $a_n = P(A_n)$.

   (a) Déterminer les valeurs de a_2, a_3 et a_4.

   (b) En distinguant suivant le résultat du premier lancer, montrer que pour tout $n \geq 2$, $a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{9}a_n$.

   (c) Déterminer l'expression de a_n en fonction de $n \geq 2$.

   (d) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} a_k$ et interpréter le résultat.