Devoir Surveillé 07

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.

Exercice 1 (Du cours).

1. Soit $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
   (a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
   (b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
   On note encore f ce prolongement.
   (c) Montrer que f est dérivable en 0.
   (d) Prouver que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant la convexité, montrer les inégalités :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x - 1$.
3. Factoriser $X^6 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Trouver tous les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q(X) = Q(X+1)$.
5. Déterminer le DL à l'ordre 5 en 0 de tan.
6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E. Rappeler la définition du sous-espace vectoriel engendré par la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ puis montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E.
7. Soit $f : x \mapsto \sin(x)$ et $g : x \mapsto \cos(x)$. Montrer que (f, g) est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 2 (Une fonction).

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. (a) Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que :
   $$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f''(x) = (x^2 - 1) f(x).$$
   (b) En déduire les variations de f' sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $0 \leq a \leq b \leq 1$, on a :
   $$f'(b)(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(a)(b-a).$$
   (d) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $1 \leq a \leq b$, on a :
   $$f'(a)(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(b)(b-a).$$
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On note T_a la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.
   (a) Donner une équation de T_a.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on note $u(x)$ l'ordonnée du point de T_a d'abscisse x. Autrement dit, T_a a pour équation $y = u(x)$.

(b) On suppose dans cette question que $a \in]0,1[$. Montrer que :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) \leq u(x).$$

Interpréter géométriquement ce résultat.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a < b$. On note $D_{a,b}$ la droite passant par les points des coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.
   (a) Donner une équation de $D_{a,b}$.
   Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on note $v(x)$ l'ordonnée du point de $D_{a,b}$ d'abscisse x.
   (b) On suppose dans cette question que $0 \leq a < b \leq 1$.
      i. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = v'(c)$.
      ii. Montrer que :
      $$\forall x \in [a,b], \quad f(x) \geq v(x).$$
      Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 3 (Des développements limités).

1. Énoncer la formule de Taylor-Young.
2. Soit $f : x \mapsto (x^3 - x^2)^{\frac{1}{3}}$.
   (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} a + bx + \dfrac{c}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (b) En déduire que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et préciser les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de son asymptote.
   (c) Représenter l'allure de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ ainsi que son asymptote.
3. Soit $g :]0,2[\to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in]0,2[,\ g(x) = \dfrac{\ln(x)}{2-x}$. On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
   (a) Justifier que g admet un développement limité à tous les ordres en 1.
   (b) Déterminer le développement limité de g en 1 à l'ordre 2.
   (c) En déduire les valeurs de $g^{(k)}(1)$ pour $k \in [\![0,2]\!]$.
   (d) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1 ainsi que sa position relative par rapport à $\mathscr{C}_g$.
   (e) Représenter l'allure de $\mathscr{C}_g$ au voisinage de 1 ainsi que sa tangente.
4. Soit $h : x \mapsto \dfrac{\arcsin(x) - x}{1 - \cos(x)}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
   (b) Calculer le développement limité de arcsin en 0 à l'ordre 5.
   On pourra penser à dériver arcsin.
   (c) Déterminer le développement limité de h en 0 à l'ordre 3.
   (d) Justifier que h est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.

Exercice 4 (Des espaces vectoriels).
On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : y''' - y = 0$$
$$(E_2) : y' - y = 0$$
$$(E_3) : y'' + y' + y = 0$$

On note E l'ensemble des solutions de (E_1), F l'ensemble des solutions de (E_2) et G l'ensemble des solutions de (E_3), c'est-à-dire :

$$E = \left\{f \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R}, f'''(t) - f(t) = 0\right\}$$
$$F = \left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) - f(t) = 0\right\}$$
$$G = \left\{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R}, f''(t) + f'(t) + f(t) = 0\right\}$$

1. (a) Montrer que E est un espace vectoriel.
   (b) Soit $f \in F$. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que $F \subset E$ et $G \subset E$.
2. (a) Résoudre (E_2) et (E_3).
   (b) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et déterminer une base de F et une base de G.
3. (a) Soit $f \in E$. On pose $f_1 = f'' + f' + f$.
   Montrer que $f_1 \in F$.
   (b) Montrer que $E = F \oplus G$.
   On pourra raisonner par analyse-synthèse.
   (c) En déduire une base de E.
   (d) Résoudre (E_1).

Exercice 5 (Des polynômes).
On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} P_0(X) = 2, \quad P_1(X) = X \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1}(X) = XP_n(X) - P_{n-1}(X) \end{cases}$$

1. Calculer P_2, P_3, P_4 et P_5.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est unitaire de degré n.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{2k+1}(0) = 0$ et $P_{2k}(0) = (-1)^k 2$.

On considère la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.
On admet que f est surjective.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}^*$, $f(z^{n+1}) = f(z)f(z^n) - f(z^{n-1})$.
5. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $f(z^n) = P_n(f(z))$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $f(z^n) = Q(f(z))$.
   Montrer que $Q = P_n$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $z_k = \mathrm{e}^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n}}$.
   (a) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Calculer $f(z_k^n)$.

(b) Déterminer les racines de P_n.

(c) Factoriser P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

(d) Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

(e) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = 0$.

8. Dans toute la fin de l'exercice, on prend $n = 5$.

(a) Déterminer les racines de $X^2 - 5X + 5$.

(b) En déduire les racines de P_5.

(c) Déterminer une expression de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Correction du Devoir Surveillé 07

Correction de l'exercice 1 :

1. (a) f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par opérations. De plus, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}$.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| \leq x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ par encadrement. Ainsi $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0)=0}$.

   (c) Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ de même que précédemment. Donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0)=0}$.

   (d) En posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \dfrac{1}{2n\pi+\pi}$, on a $u_n \to 0$, $v_n \to 0$ mais $f'(u_n) \to -1$ et $f'(v_n) \to 1$. Ainsi, f' n'a pas de limite en 0 : $\boxed{f \text{ n'est pas } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

2. (a) La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \mathrm{e}^x \geq 0$. Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x+1$. Par convexité, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de cette tangente : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geq x+1}$.

   (b) La fonction $g : x \mapsto \ln(x)$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \leq 0$. Donc g est concave sur $]0,+\infty[$. La tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x-1$. Par concavité, $\mathscr{C}_g$ est en dessous de cette tangente : $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \ln(x) \leq x-1}$.

3. $P = X^6 - 1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$P(z) = 0 \iff z^6 = 1 \iff \exists k \in [\![0,5]\!], z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{6}}$$
Ainsi, $\boxed{P = (X-1)\left(X-\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X-\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}\right)(X+1)\left(X-\mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X-\mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)}$ est la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.

   On développe ensuite les termes conjugués : $P = (X-1)(X+1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(2\frac{\pi}{3}\right)X+1\right)$, donc $\boxed{P = (X-1)(X+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)}$

4.
   - Analyse : soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(X) = Q(X+1)$. Si Q n'est pas constant, alors Q admet une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ (d'Alembert-Gauss). Alors $Q(\alpha+1) = \mathbb{Q}(\alpha) = 0$, puis par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + n$ est racine de Q. Donc si Q admet une racine, alors il en admet une infinité et c'est donc le polynôme nul. Ainsi, les seules polynômes possibles sont les polynômes constants.
   - Synthèse : on vérifie que les polynômes constants sont bien solutions du problème.

5. On commence par trouver un $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{\cos(x)}$: $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$ donc
$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right) + \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).
\end{aligned}$$
Puis, $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5) \underset{x\to 0}{=} x\left(1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + o(x^4)\right)$. Donc
$$\begin{aligned}
\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} x\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^4)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{2x^4}{15}+o(x^4)\right)
\end{aligned}$$
On obtient donc $\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)}$.

6. D'après le cours, $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p) = \left\{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k,\ \text{avec } \lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{K}\right\}$.
   - On a $0_E = 0.u_1 + \cdots + 0.u_p \in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$.
   - Soit $x, y \in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_p,\mu_1,\dots,\mu_p \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=1}^{p}\lambda_k u_k$ et $y = \sum_{k=1}^{p}\mu_k u_k$.

     Alors $\alpha x + y = \sum_{k=1}^{p}(\alpha\lambda_k+\mu_k)u_k \in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$.

   Donc $\boxed{\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p) \text{ est un sev de } E}$.

7. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda f + \mu g = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = 0$. En particulier pour $x = 0$, on obtient $\mu = 0$ et pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $\lambda = 0$. Donc $\boxed{(f, g) \text{ est libre}}$.

Correction de l'exercice 2 :

1. (a) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par opérations. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f'(x) = -x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ et $f''(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
   Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f''(x) = (x^2-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}$.
   (b) Pour tout $x \in [0,1]$, $f''(x) \le 0$ et pour tout $x \in [1,+\infty[$, $f''(x) \ge 0$. Donc $\boxed{f' \text{ est décroissante sur } [0,1] \text{ et croissante sur } [1,+\infty[}$.
   (c) Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ avec $0 \le a \le b \le 1$. Si $a = b$, l'inégalité est vraie.
   Sinon, f' est dérivable sur $[a,b]$ et comme f' est décroissante sur $[a,b]$, pour tout $x \in [a,b]$, $f'(a) \ge f'(x) \ge f'(b)$. D'après l'inégalité des accroissements finis, $f'(b) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le f'(a)$. Comme $b - a > 0$, on obtient $\boxed{f'(b)(b-a) \le f(b) - f(a) \le f'(a)(b-a)}$.
   (d) On procède de même sauf que f' est croissante sur $[a,b]$.
2. (a) D'après le cours, $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ donc $\boxed{y = -a\,\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}(x-a) + \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}}$ est une équation de T_a.
   (b) Comme pour tout $x \in [0,1]$, $f''(x) \le 0$, f est concave sur $[0,1]$. Donc la courbe représentative de f est en dessous de la tangente T_a : $\boxed{\forall x \in [0,1],\ f(x) \le u(x)}$.
3. (a) La pente de $D_{a,b}$ est $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + c$ est une équation de $D_{a,b}$. De plus, comme $D_{a,b}$ passe par $(a, f(a))$, on a $f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a + c$, donc $c = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$. Ainsi $\boxed{y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}}$ est une équation de $D_{a,b}$.
   (b) Notons tout d'abord que pour tout $x \in [a,b]$, $v'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
   De plus, comme f est dérivable sur $[a,b]$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.
   Ainsi, $\boxed{\text{il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f'(c) = v'(c)}$.
   (c) Comme f est concave sur $[a,b]$, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de sa sécante $D_{a,b}$ sur cet intervalle : $\boxed{\forall x \in [a,b],\ v(x) \le f(x)}$.

Correction de l'exercice 3 :

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur l'intervalle I et soit $a \in I$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a :
$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big).$$
2. (a) Rappelons que $(1+u)^{\frac{1}{3}} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + o(u^2)$. On remarque que $f(x) = x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$. Comme $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$:
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$
   Ainsi, $\boxed{a = 1,\ b = -\frac{1}{3} \text{ et } c = -\frac{1}{9}}$.
   (b) On a donc $f(x) - \left(x - \frac{1}{3}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, et la droite D d'équation $\boxed{y = x - \frac{1}{3}}$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
   De plus, $f(x) - \left(x - \frac{1}{3}\right) \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{9x} < 0$, donc $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en dessous de son asymptote}}$.
   (c) On trace d'abord la droite.
3. (a) La fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,2[$ par opérations sur les fonctions usuelles. Elle admet donc un DL à tous les ordres en 1 d'après la formule de Taylor-Young.
   (b) On pose $X = x - 1 \xrightarrow[x\to 1]{} 0$. On a donc
$$\frac{\ln(x)}{2-x} = \frac{\ln(1+X)}{1-X} \underset{X\to 0}{=} X\left(1 - \frac{X}{2} + o(X)\right)(1 + X + o(X)) = X\left(1 + \frac{X}{2} + o(X)\right).$$
   Ainsi,
$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + o\big((x-1)^2\big).}$$
   (c) En utilisant Taylor-Young, on trouve $\boxed{g(1) = 0,\ g'(1) = 1 \text{ et } g''(1) = 1}$.
   (d) La tangente a pour équation $y = x - 1$. Elle est au-dessous de la courbe au voisinage de 1.
   (e) Voir geogebra.
4. (a) Comme arcsin est définie sur $[-1,1]$ et que pour tout $x \in [-1,1]$, $\cos(x) = 1 \iff x = 0$, $\boxed{h \text{ est définie sur } [-1,1] \setminus \{0\}}$.

(b) Commençons par développer $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre 4 en 0 :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+o(x^4).$$

Comme $\arcsin(0)=0$, on a $\boxed{\arcsin(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o(x^5)}$.

(c) D'après la question précédente,

$$h(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o(x^5)}{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)} \underset{x\to 0}{=} 2x\frac{\frac{1}{6}+\frac{3x^2}{40}+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{12}+o(x^2)} \underset{x\to 0}{=} 2x\left(\frac{1}{6}+\frac{3x^2}{40}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{x^2}{12}+o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} 2x\left(\frac{1}{6}+\frac{4}{45}x^2+o(x^2)\right)$$

Donc $\boxed{h(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{3}+\frac{8x^3}{45}+o(x^3)}$.

(d) D'après la question précédente, $h(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc h est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0)=0$. De plus, h admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, donc est $\boxed{\text{dérivable en 0}}$.

Correction de l'exercice 4 :

1. (a) On montre que E est un sev de $\mathscr{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$:
   - La fonction nulle $f=0_{\mathscr{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f'''(t)-f(t)=0$, donc $f\in E$.
   - Soient $f,g\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $(\lambda f+g)'''(t)-(\lambda f+g)(t)=\lambda f'''(t)+g'''(t)-\lambda f(t)-g(t)=\lambda(f'''(t)-f(t))+g'''(t)-g(t)=0$ car $f,g\in E$. Donc $\lambda f+g\in E$.

   Ainsi, $\boxed{E \text{ est un espace vectoriel}}$.

   (b) Comme $f'=f$ et f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, f' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. En répétant une fois, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^3 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

   (c)
   - Soit $f\in F$. D'après la question précédente, f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f'''(t)=f''(t)=f'(t)=f(t)$ en dérivant l'équation (E_2) deux fois. Donc $\forall t\in\mathbb{R}$, $f'''(t)-f(t)=0$. Ainsi, $f\in E$. Donc $\boxed{F\subset E}$.
   - Soit $f\in G$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc f' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $f'+f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Or $f''=-f'-f$, donc f'' est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.
     Puis pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f''(t)+f'(t)+f(t)=0$ et $f'''(t)+f''(t)+f'(t)=0$. En soustrayant les deux équations, $\forall t\in\mathbb{R}$, $f'''(t)-f(t)=0$. Donc $f\in E$. Ainsi, $\boxed{G\subset E}$.

2. (a)
   - Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Alors $\boxed{f\in F \iff \exists A\in\mathbb{R} \mid \forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=Ae^t}$.

     L'équation caractéristique de (E_3) est $r^2+r+1=0$ dont les solutions sont $-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

     Soit $f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On a $\boxed{f\in G \iff \exists A,B\in\mathbb{R} \mid \forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=e^{-\frac{t}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)}$.

   (b) Notons $a: t\mapsto e^t$, $b: t\mapsto e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ et $c: t\mapsto e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$. D'après la question précédente, $F=\mathrm{Vect}(a)$, $G=\mathrm{Vect}(b,c)$. Donc $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont des sev de } E}$.

   De plus, $\boxed{a \text{ est un vecteur non nul et forme une base de } F}$.

   Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda b+\mu c=0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Alors pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\lambda e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\mu e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)=0$. En particulier pour $t=0$, on trouve $\lambda=0$. On en déduit alors $\mu=0$ car c n'est pas la fonction nulle. Ainsi, (b,c) est une famille libre et génératrice de G : $\boxed{(b,c) \text{ est une base de } G}$.

3. (a) On remarque déjà que f_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   De plus, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f_1'(t)-f_1(t)=f'''(t)+f''(t)+f'(t)-f''(t)-f'(t)-f(t)=f'''(t)-f(t)=0$. Donc $\boxed{f_1\in F}$.

   (b) Soit $f\in E$. Montrons qu'il existe un unique couple $(f_1,f_2)\in F\times G$ tel que $f=f_1+f_2$.
   - Analyse : soit $(f_1,f_2)\in F\times G$ tels que $f=f_1+f_2$. La question précédente suggère de calculer $f''+f'+f=f_1''+f_1'+f_1$ car $f_2\in G$. Or $f_1''=f_1'=f_1$, donc $3f_1=f''+f'+f$ et $f_1=\frac{1}{3}(f''+f'+f)$.

     Puis $f_2=f-f_1=\frac{1}{3}\left(2f-f'-f''\right)$.
   - Synthèse : soit $f_1=\frac{1}{3}(f''+f'+f)$ et $f_2=\frac{1}{3}\left(2f-f'-f''\right)$. D'après la question précédente, $f_1\in F$. On vérifie aussi que $f_2\in G$ et que $f=f_1+f_2$.

   Ainsi $\boxed{E=F\oplus G}$.

   (c) $\boxed{\text{Une base de } E \text{ est donc } (a,b,c)}$.

   (d) Soit $f\in\mathscr{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a $\boxed{f \text{ est solution de } (E) \iff \exists A,B,C\in\mathbb{R} \mid \forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=Ae^t+Be^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+Ce^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}$.

Correction de l'exercice 5 :

1. On utilise la formule de récurrence : $\boxed{P_2 = X^2-2,\ P_3 = X^3-3X,\ P_4 = X^4-4X^2+2 \text{ et } P_5 = X^5-5X^3+5X}$.
2. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
   - Initialisation : les cas $n = 1,2,3,4$ et 5 sont déjà traités.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que P_n et P_{n+1} sont unitaires de degrés respectifs n et $n+1$.
     Alors $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$. Or, $\deg(XP_{n+1}) = n+2$ et $\deg(P_n) = n$, donc $\deg(P_{n+2}) = n+2$. De plus, son terme dominant vient de XP_{n+1} qui est X^{n+2} par HR.

   D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n \text{ est unitaire de degré } n}$.
3. On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$:
   - Initialisation : pour $k = 0$, on a bien $P_0(0) = 2 = (-1)^0 2$ et $P_1(0) = 0$.
   - Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $P_{2k+1}(0) = 0$ et $P_{2k}(0) = (-1)^k 2$.
     Alors $P_{2k+2} = XP_{2k+1} - P_{2k}$, donc $P_{2k+2}(0) = -P_{2k}(0)$ et $P_{2k+2}(0) = (-1)^{k+1}2$.
     De plus, $P_{2k+3} = XP_{2k+2} - P_{2k+1}$, donc $P_{2k+3}(0) = -P_{2k+1}(0) = 0$.

   D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P_{2k}(0) = (-1)^k 2 \text{ et } P_{2k+1}(0) = 0}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$, $f(z)f(z^n) - f(z^{n-1}) = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) - z^{n-1} - \frac{1}{z^{n-1}} = z^{n+1} + \frac{1}{z^{n-1}} + z^{n-1} + \frac{1}{z^{n+1}} - z^{n-1} - \frac{1}{z^{n-1}} = z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}$.

   Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}^*,\ f(z^{n+1}) = f(z)f(z^n) - f(z^{n-1})}$.
5. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
   - Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $f(z^0) = 2$ et $P_0(f(z)) = 2$.
     Pour $n = 1$, on a $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P(f(z)) = f(z)$.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_n(f(z)) = f(z^n)$ et $P_{n+1}(f(z)) = f(z^{n+1})$.
     Alors $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_{n+2}(f(z)) = f(z)P_{n+1}(f(z)) - P_n(f(z)) = f(z)f(z^n) - f(z^n) = f(z^{n+2})$ d'après la question précédente.

   D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*,\ P_n(f(z)) = f(z^n)}$.
6. On a pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $Q(f(z)) = P_n(f(z))$. Or, f est surjective sur $\mathbb{C}$, donc elle prend une infinité de valeurs. Ainsi, P_n et Q coïncident en une infinité de valeurs : $\boxed{P_n = Q}$.
7. (a) Commençons par $z_k^n = \mathrm{e}^{\frac{(2k+1)i\pi}{2}} = \mathrm{e}^{ik\pi} i = (-1)^k i$. Donc $f(z_k^n) = (-1)^k i + \frac{1}{(-1)^k i} = (-1)^k i - (-1)^k i$. D'où $\boxed{f(z_k^n) = 0}$.

   (b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Comme $P_n(f(z_k)) = f(z_k^n) = 0$, $f(z_k)$ est racine de P_n. Or, $f(z_k) = \mathrm{e}^{-\frac{(2k+1)i\pi}{2n}} + \mathrm{e}^{-\frac{(2k+1)i\pi}{2n}} = 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ qui est donc racine de P_n.
   Puis, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$ et cos est injective sur cet intervalle. Donc les $2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont n racines distinctes de P_n. Puisque $\deg(P_n) = n$, il n'y a pas d'autres racines.
   $\boxed{\text{Les racines de } P_n \text{ sont les } 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \text{ pour } k \in [\![0, n-1]\!]}$.

   (c) D'après la question précédente, et comme P_n est unitaire, $\boxed{P_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)}$.

   (d) Le produit des racines de P_n est égal au coefficient constant divisé par le coefficient dominant (qui vaut 1). Or, le coefficient constant vaut $P_n(0)$. Donc $\prod_{k=0}^{n-1} 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ (-1)^{n/2}2 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$. Donc $\boxed{\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}}$.

   (e) On montre par récurrence sur n que le coefficient de degré $n-1$ de P_n est nul. Or, la somme des racines de P_n est égal à ce coefficient.
   Donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = 0}$.
8. (a) Avec le discriminant, on trouve $\boxed{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}}$.

   (b) D'après la question précédente, $X^2 - 5X + 5 = \left(X - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$. De plus, $\frac{5-\sqrt{5}}{2} \geq 0$.
   Donc $P_5 = X^5 - 5X^3 + 5 = X(X^4 - 5X^2 + 5) = X\left(X^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X^2 - \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) = X\left(X - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)\left(X + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right)$.
   Ainsi, les racines de P_5 sont $\boxed{0, \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}$.

   (c) On a vu précédemment que les racines de P_5 sont $2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right), 2\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right), 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, 2\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right), 2\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$. Les deux dernières sont négatives, et comme $\pi/10 < 3\pi/10$ et que cos est décroissante sur $[0, \pi]$, $2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ et $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$.